Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
oktober

Euclides 2

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c^, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Ringing the changes[1]

An Mogensen-Van Werveke

Het verhaal van een week over LUIDEN EN GELUID in een zesde leerjaar

De eigenlijke aanleiding tot deze dagen over geluid was een bezoek aan een Engels kerkje in Noormannen-stijl in de Border-Counties van Engeland in 1980. Op de balken van de klokketoren stonden enkele permutaties van (1, 2, 3, 4) gegrift, maar onvolledig. Daarnaast hingen de touwen van vijf klokken. Die onvolledigheid bleef me intrigeren.
In het Wiskobas-bulletin van oktober '80 (pas in '81 gelezen), viel ik over het artikel van prof. F. van der Blij '*Doodsklokken over het IOWO*'. Het handelde over de wiskunde van het Engelse klokkeluiden. Van der Blij werd gefascineerd door de wiskundige kant van de campanologie (de klokkeluiders-wetenschap), en vond er een didactisch verhaal bij uit: dat was het begin van een langzaam groeiende lesvoorbereiding.
Als een leraar een leuk lesonderwerp ontdekt moet hij twee dingen doen:

a in het leerplan een verantwoording vinden
b een klas vinden die zijn slachtoffer kan worden.

In het 'Leerplan Vernieuwd Wiskunde-onderricht in het Rijksbasisonderwijs '77' vond ik: Hoofdstuk VIII Vraagstukken ... Systematisch leren opschrijven en tellen van het aantal mogelijke gevallen.
De klas en de onderwijzer vond ik op de oefenschool van de Rijksnormaalschool te Gent waar ik les geef.
In overleg met Paula Van Lint, mijn collega muziek, koos ik als instrumenten xylofoons of metallofoons, respectievelijk een klokkespel (d.w.z. metalen klankstaven op hout gemonteerd), want echte klokken waren helaas niet te vinden.

[1] Voordracht gehouden op de 11e gemeenschappelijke studiedag van de VVWL en de NVvW te Breda op 22 maart 1986.

De les over het Engelse klokkeluiden werd een eerste keer gegeven eind juni '82 en als volgt geëvalueerd:

Het onderwerp boeit de kinderen, de opdrachten zijn uitvoerbaar.
Eén, zelfs twee lesuren is te weinig voor de uitwerking van het onderwerp. Het muzikale gedeelte kwam te weinig aan zijn trekken.
Er steekt genoeg stof in het onderwerp om nog andere vakken erbij te betrekken.

Om allerlei redenen gingen er twee schooljaren overheen, zonder een nieuwe poging.
In juli 1984 verzeilde ik weer in oude Engelse kerkjes, nu in Kent en Sussex, en overal hingen getuigenissen van het Engelse klokkeluiden aan de muren: plaketten over memorabele uitvoeringen, regels voor het luiden, namen van klokkeluidersploegen. Na een lange speurtocht slaagde ik ér in een oefenbijeenkomst bij te wonen.
Toen bleek dat het klokkeluiden in werkelijkheid iets anders verloopt dan in het didactisch verhaal van professor Van der Blij, en meteen was de lont weer aangestoken: in het daarop volgende schooljaar zou ik de les opnieuw geven, anders georganiseerd, én in een veel bredere opzet ingekaderd.
We hebben er dus een week voor uitgetrokken, en wat bleek?

Het onderwerp boeit de kinderen, de aangepaste opdrachten zijn niet alleen uitvoerbaar, maar staan muzikaal ook dichter bij het werkelijke klokluiden. Eén week is eigenlijk niet voldoende voor wat we allemaal zouden kunnen doen.
Het muzikale gedeelte kreeg nu wel behoorlijk aandacht.
Behalve muziek werden ook geschiedenis, moedertaal, plastische opvoeding, natuurkennis en Frans rechtstreeks of zijdelings bij het thema betrokken.

Hoe wordt gewerkt in dit zesde leerjaar?

Voor elk 'vak' is er een al of niet recent bijgewerkt leerplan; soms, zoals voor geschiedenis en aardrijkskunde, met grote belangstellingsonderwerpen, die in vijfde of zesde leerjaar aan de beurt kunnen komen.
Het wordt aanbevolen om onderwerpen uit meer-

dere vakken op elkaar te laten aansluiten. Het staat elke onderwijzer in elk geval vrij zelf de volgorde te bepalen. Hiervan hebben Leon de Craene, klastitularis, en ik dankbaar gebruik gemaakt om een 'geluid'-week te houden.

Binnen het raam van de lestijden op de lagere school waren er een aantal beperkingen waarmee we rekening moesten houden.

Die waren:

De week viel vlak na de paasvakantie. Het eerste uur moet affectief de draad weer worden opgenomen: de kinderen moeten hun verhalen over de vakantie kwijt kunnen aan elkaar en aan de onderwijzer.

Er moet geld voor eetmalen, spaargeld voor de bosklas e.d. worden opgehaald.

De uren moraal/godsdienst liggen vast, want ze worden door een andere lesgever gegeven.

Idem voor de lichamelijke opvoeding.

Gezien het late tijdstip in het schooljaar wilde de onderwijzer graag alle leervakken in de juiste verhouding aan bod laten komen (vroeger in het schooljaar kan wel eens geschipperd worden).

De volgorde van de lessen hebben we vrij gekozen in functie van het onderwerp of van de lengte van de beschikbare lestijden. Dat betekent dat we op een dag rustig twee uur na elkaar wiskunde konden doen, of helemaal geen. En ook dat bijvoorbeeld wiskunde, taal en muziek door elkaar aan bod kwamen.

Geen beperking, maar een voordeel, was dat er vóór de vakantie instaplessen geweest waren: een bezoek aan de middeleeuwse binnenstad van Gent, met bijzondere aandacht voor het Belfort en de Lakenhalle, en het lezen van een tekst hierover, dit in het kader van de geschiedenislessen.

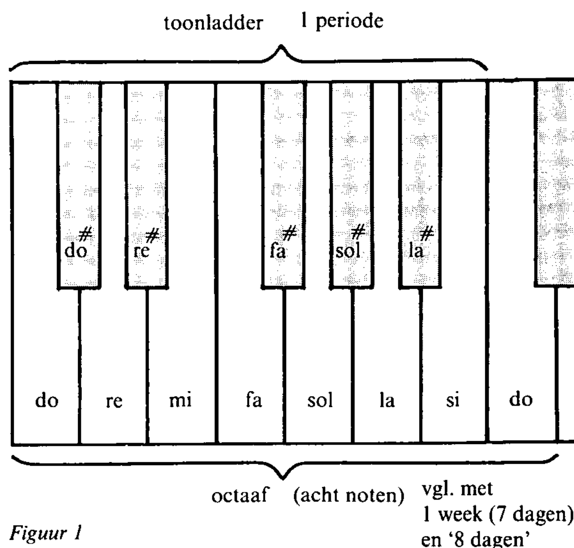
Hieronder staat het lesrooster, dat min of meer werd gerespecteerd. In de loop van de week stelden de kinderen als naar gewoonte een themakaft samen met de gekregen documentatie en hun eigen werk.

Wat in zo'n klas als vanzelfsprekend aanvaard wordt is: wie het meest over een onderwerp weet, leidt de les. Dat was dus:

de onderwijzer voor taal, plastische opvoeding en natuurkennis,

en met mij samen voor wiskunde en geschiedenis, maar Jet zorgde voor de begeleiding op het orgel bij het zingen, terwijl de andere kinderen allerlei Orff-instrumenten bespeelden,

en Tom gaf een spreekbeurt over de begrippen octaaf, en hele en halve tonen (figuur 1).



Figuur 1

De wiskunde deze week

1 *Een tijdsband opstellen*

In de teksten over het Belfort en over klokke Roeland komen heel wat data voor. Voor een betere inleving hiervan maken we een tijdsband. Eerst samen op het bord, met steunende vragen:

Hoeveel eeuwen willen we afbeelden (van de bouw van het Belfort tot nu)?

Hoeveel plaats is er op het bord? (2,35 m = 235 cm)

Hierbij werd heel wat herleid (van m in cm) en gerekend. De kinderen worden geconfronteerd met een probleem waarbij de deling *niet* opgaat, zodat er meer dan één oplossing gesuggereerd wordt (een eeuw voorstellen door 33 cm of 30 cm).

Wat stelt het 'overschot' voor? Waar is dat het nuttigst? (vooraan of achteraan?)

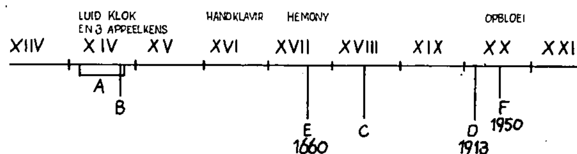
De plaats waar de 17e eeuw begint werd *berekend*, rekening houdend met 'het overschot' vooraan.

Eeuwen werden genoteerd in Romeinse cijfers.

Er werd nog eens ingegaan op het feit dat de *17*e eeuw begint in *16*01.

Daarna hebben de kinderen deze tijdsband *op schaal* in hun schrift overgenomen, waarbij zij nu zelf alles moeten uitrekenen (figuur 2).

maandag	dinsdag	woensdag	donderdag	vrijdag
Vakantieverhalen Administratie Herlezen tekst Belfort	Engelse maten Berekening diam. en gewicht	Methods of Change-Ringing	LO	Steloefening i.v.m. een onderwerp van deze week
G / M	vgl. voor allerlei klokken	Partituren voor 3 en 4 klokken	Spraakkunst i.v.m. tekst kl.Roeland	LO
Klokke Roeland (tekst)	Dictee i.v.m. ←	Schrijven, spelen, bespreken	Proeven i.v.m. geluidsgolven en horen	Zinsontleding m.b.v. zinnen uit een van de teksten van deze week
Beiaarden in Vlaanderen en Engeland	Zegswijzen i.v.m. klokken { opzoeken tekenen dramatiseren	Frère Jacques, sonnez les matines	Het oor	Afwerken ... evaluatie
Hele en halve tonen Octaaf Klavier	Zingen en begeleiden 'De klokken van Haarlem'		Medaillon afwerken in klei	Kaft bundelen opruimen
Verband { toonhoogte grootte Tijdsband Alfriston	Ontwerp voor gipsaf- druk: Medaillon v. kl.Roeland		en gieten in gips	G / M



LEGENDE

A - BOUW VAN HET BELFORT (1313 - 1378)
B - DE DRAAK (1377)
C - GEMEENTEGEVANG (1741)
D - KLOKKE ROELAND LUIDDE VOOR HET EERST ELEKTRISCH (1913)
E - 11 NOVEMBER 1660
F - 1950 OP E. BRAUNPLEIN

Figuur 2

Een indringende vraag uit de klas. 'Als de klokkeluider in de 14e eeuw de klok luidt om het uur aan te kondigen, omdat de mensen nog geen uurwerken, wekkers, telefoon, radio ... hebben, hoe weet *hij* dan hoe laat het is?'

2 *Inleving van numerieke gegevens*

Op de lijst van de 14 beiaarden van Oost-Vlaanderen (figuur 3) worden het aantal klokken per beiaard en het totale gewicht ervan aandachtig gelezen en besproken.

Welke noemen we echte beiaarden? Met andere woorden welke beiaarden bestaan uit ten minste $2 + \frac{1}{2}$ octaaf? (te berekenen:

$$2 \times \underbrace{\frac{(7+5)}{1\ \text{octaaf}}} + \frac{1}{2} \times (7+5))$$

De beiaarden met eenzelfde aantal klokken kunnen sterk in gewicht verschillen.
Bijvoorbeeld voor die van 49 klokken: van 5,2 ton, over 6,8 ton; 7,1 ton; 8,8 ton; 9,6 ton tot 15,2 ton en 16,8 ton. (De zwaarste weegt meer dan 3 × zoveel als de lichtste!)

Beiaarden in Oost-Vlaanderen

	aantal klokken	totaal gewicht
Aalst (Belforttoren)	52	3.641 kg
Brakel (O.L.V. en St. Pieterskerk)	49	9.644 kg
Dendermonde (Belforttoren)	49	6.800 kg
Geraardsbergen (St. Bartholomeuskerk)	49	8.797 kg
Gent (Belfort)	53	28.460 kg
Haaltert (St. Gorikskerk)	44	5.235 kg
Herzele (Gemeentehuis)	28	1.660 kg
Lede (St. Martinuskerk)	24	800 kg
Lokeren (St. Laurentiuskerk)	49	16.789 kg
Oudenaarde (St. Walburgskerk)	49	15.212 kg
Ronse (St. Hermeskerk)	44	7.700 kg
Sint-Niklaas (Stadhuis)	49	5.200 kg
Temse (Stadhuis)	23	684 kg
Zottegem (O.L. Vrouwekerk)	49	7.112 kg

Figuur 3

Er wordt voorspeld: de klokken zullen verschillen in grootte (hoogte, dikte ...). Hier gaan we – kwalitatief – op in in de les over hele en halve tonen, waar we vaststellen dat, hoe groter het instrument, des te lager de toon. We controleren het op blokfluiten, op de snaren van een gitaar, op de staven van de xylofoon, op trommels, op triangels.

Ook de gegevens over de klokken van het Zuidengelse Alfriston proberen we te begrijpen (figuur 4).

Alfriston minor bells

Bell	∅	Weight	Note	Date
Tenor	3′ $0\frac{1}{8}$″	8 . 2 . 10	A	1390
5th	2′ $9\frac{1}{2}$″	6 . 2 . 6	B	1928 (1∂ϱ8)
4th	2′ 8 ″	6 . 2 . 5	C#	1928 (1587)
3th	2′ $5\frac{3}{8}$″	5 . 0 . 3	D	1908 (1811)
2nd	2′ $3\frac{1}{8}$″	4 . 0 . 25	E	1928 (1698)
Treble	2′ $1\frac{3}{4}$″	3 . 2 . 0	F#	1819

Figuur 4

We duiden op de tijdsband op het bord aan wanneer elke klok in gebruik wordt genomen. Bij iedere aanduiding laat Jet op het klasorgeltje de tonen klinken die de mensen die eeuw al van de toren hoorden spelen (figuur 5).

XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
						3th
Tenor		4th	5th			5th
			2nd	3th Treble		4th
						2nd
A		C#	B		D F#	
la		do#	si		re fa#	
			E			
1390		1587			1811	
			mi			
			1698		1819	

We spelen: 1390 la
1587 la, do#
1698 la, do#, si en mi
1811 la, do#, si, mi, re
1819 la, do#, si, mi, re, fa#

Figuur 5

3 *Spiegelen*
Een kort meetkundig intermezzo ontspint zich spontaan bij het jaartal '1∂ϱ8'.
Wat is hier gebeurd?
De kinderen, die al gipsafbeeldingen – 'fossielen!' – maakten van in klei gekraste figuren, verklaren dit als een spiegelbeeld, een ongelukje bij het graveren.
Maar enkele kinderen merken op: 'Het is vreemd dat de 1 en de 8 dan niet van plaats verwisseld werden, immers 1698 | 8ϱ∂1
Ze bedoelen: 6 en 9 werden afzonderlijk en 'ter plaatse' gespiegeld, maar we verwachtten eerder dat heel het getal zou gespiegeld zijn.

4 *Vreemde maten ontcijferen*
Op dinsdag gingen de kinderen in groepjes van 4 à 5 bij elkaar zitten. Twee groepjes werkten aan opdracht 1 en 2, twee aan opdracht 3 en 4.
Opdracht 5 werd achteraf klassikaal bekeken.

Opdrachten over de klokken van Alfriston (Engeland)

Opdracht 1
Vergelijk de diameter van de klokken van Alfriston met die van klokke Roeland en die van Big Ben.

Opdracht 2
Hoe groter de diameter des te dieper de toon: klopt dat bij de klokken van Alfriston?

Opdracht 3
Bereken het gewicht van de klokken van Alfriston in kg.

Opdracht 4
Rangschik de klokken van Alfriston eerst volgens toonhoogte en dan volgens gewicht.
Wat merk je op?

Opdracht 5
Vergelijk het gewicht van de beiaard van Alfriston met dat van enkele Oostvlaamse beiaarden (en het aantal klokken ervan!).
Zegt dat je iets over hun toonhoogte?

Big Ben: is de naam van de grote klok in de klokketoren (Clock Tower) van de parlementsgebouwen te Londen. De klok heeft een middellijn van 2,743 m en is met een gewicht van 13.195 kg een der zwaarste klokken ter wereld. De klepel weegt 203 kg.
De klok werd in juni 1858 geïnstalleerd (ingehuldigd). Hij slaat alleen de volle uren en is omgeven door de vier kleinere klokken van het carillon, waarop de kwartieren worden geslagen.

Gentenaars zijn erg fier op hun klokke Roeland, zodat opdracht 1 wel insloeg:
'Zouden er in Engeland grotere klokken hangen dan de onze?' In de tekst over klokke Roeland stond onder meer: 'Roeland is de grootste klok die Hemony ooit gegoten heeft; ze heeft een voetomtrek van 6,60 m'.

Opdracht 3 luidde oorspronkelijk: 'Bereken het gewicht van de klokken van Alfriston'. We kregen prompt als repliek dat het antwoord in de gegevens stond.
Het eerste probleem dat zich stelde was: 'Wat betekenen die Engelse maten in de kolommen "∅" en "weight" van figuur 4?'
We lieten de opdrachten even liggen, en bespraken de omzettingen (figuur 6).
Om te beginnen ging iedereen de lengte van zijn eigen voet meten.
Uit 1 yd = 3 feet = 0,9144 m besloten ze dat de Engelsen waarschijnlijk de voet van een volwassene als standaardlengte hadden gekozen. Individueel vulden ze nu de hokjes in (figuur 6).
Tweede probleem: de grote tenor heeft een diameter van meer dan 3′. Betekent ′ nu: mile? yard? foot? of inch?
3 mile is bijna 5 km; 3 yd is bijna 3 m; 3 ft is bijna 1 m; 3 in is ongeveer 7,5 cm.
Ze hebben klokke Roeland met eigen ogen *gezien* en weten dat de diameter géén 3 m is, ja minder dan hun eigen lengte. Chauvinistisch besluiten ze dat ′ foot betekent, en ″ inch. Wat ik bevestig.
Het derde probleem: in de kolom 'weight' staan géén maatsymbolen, alleen getallen gescheiden door punten. Om het geheel niet te zwaar te maken en het enthousiasme niet te laten tanen hebben we meegedeeld dat hier cwt, quarter en pound bedoeld wordt. In figuur 7 zien we hoe de tussenstappen voor de berekening van de gewichten op een systematische manier aan het bord werden genoteerd (analoog voor de diameters). Het eigen werk van de

Engelse lengtematen

1 mile	=	=	= 1760 yd	= 1,609 km	= m
1 yard	=	= 3 feet	= 1 yd	= 0,9144 m	= cm
1 foot (ft)	= 12 inches	= 1 ft	= yd	= m	= cm
1 inch (in)	= 1 in	= ft	= yd	= cm	

Engelse gewichten

1 (long) ton	= 20 cwt	= stones	=	=	=	= 1016 kg
1 (long) hundredweight	= 1 cwt	= 8 stones	= lbs	=	=	= kg
1 quarter	= $\frac{1}{4}$ cwt	= 2 stones	= lbs	=	=	= kg
1 stone	=	= 1 stone	= 14 lbs	=	=	= kg
1 pound	=		1 lb	= 16 oz	=	= 0,4536 kg
1 ounce	=	=	=	= 1 oz	= 16 dr	= g
1 dram	=	=	=	=	= 1 dr	= g

Figuur 6

Gewicht in kg van de klokken van Alfriston

	Tenor		5th		4th		3th		2nd		Treble	
	(Eng)	kg	(Eng)	kg	(Eng)	kg	(Eng)	kg	(Eng)	kg	(Eng)	kg
1 cwt = 50,8 kg	8	406,4	6	304,8	6	304,8	5	254	4	203,2	3	152,4
1 qr = 12,7 kg	2	25,4	2	25,4	2	25,4	0	0	0	0	2	25,4
1 lb = 0,4536 kg	10	4,536	6	2,7	5	2,268	3	1,36	25	11,34	0	0
		436,336		332,9		332,46		255,36		214,54		177,8

Afronden: 436,5 kg + 333 kg + 332,5 kg + 255,5 kg + 214,5 kg + 178 kg = 1.750,0 kg

Figuur 7

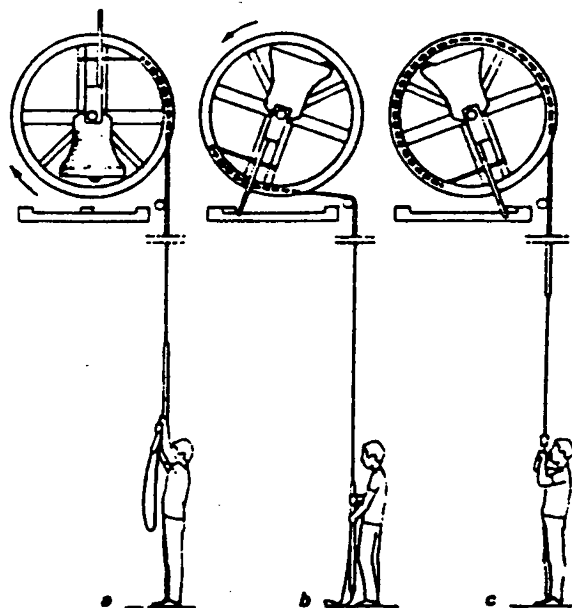
kinderen zag er chaotischer uit: de bordschikking hield een suggestie in van hoe het overzichtelijk kan. Maar de kinderen hadden al een te zware inspanning geleverd om hier dieper op in te gaan.

5 *Het eigenlijke klokkeluidersprobleem*

Bij het beiaardspel, zoals het zich in de lage landen ontwikkelde sedert de 14e eeuw, is de beiaard in wezen een muziekinstrument als een ander. Voor de kinderen goed te vergelijken met het klasorgeltje.
Het Engelse klokkeluidersspel ontwikkelde zich meer als een muzikale sportprestatie, met een sterk wiskundige inslag (toegepaste groepentheorie avant-la-lettre).

Situatiebeschrijving

Vier tot twaalf klokken hangen in een ronde in de toren. Ze worden geluid met klokketouwen. Vóór het luiden begint worden ze 'opgetrokken', dat wil zeggen ondersteboven gedraaid. In deze stand kunnen ze – in labiel evenwicht – blijven, vóór en na het luiden. Het eigenlijke luiden bestaat er in de klok, beurtelings met en tegen de zon, over iets meer dan 360° te laten draaien: elke draai vergt een ruk aan het touw; bij elke ruk slaat de klepel éénmaal tegen de klok (zie figuur 8).
Omwille van de labiele evenwichtsstand na elke ruk aan het touw is het nodig dat snel na elkaar geluid wordt, en dat voor elke klok de tijd tussen twee rukken weinig varieert.
Speelde men in de 14e eeuw uitsluitend rounds (1234 1234 1234 enz.; waarbij 1 staat voor het eenmaal luiden van klok 1), dan ging de leider later andere volgorden afroepen om wat meer variatie en spanning in het spel te brengen. Om dit afroepen tijdens het spel te vereenvoudigen ontstonden 'methods', dit zijn systemen met regels waarbij alle klokkeluiders gedurende een bepaalde tijd wisten welke wisselingen van hen verwacht werden.



Figuur 8

Change Ringing

The basic principle in ringing changes on bells is called the Plain Hunt. Each bell follows a regular path among the others. It goes from the front or lead up to back or behind and down to lead again.

1	2	3	4	5	6	7
2	1	4	3	6	5	7
2	4	1	6	3	7	5
4	2	6	1	7	3	5
4	6	2	7	1	5	3
6	4	7	2	5	1	3
6	7	4	5	2	3	1
7	6	5	4	3	2	1
7	5	6	3	4	1	2
5	7	3	6	1	4	2
5	3	7	1	6	2	4
3	5	1	7	2	6	4
3	1	5	2	7	4	6
1	3	2	5	4	7	6
1	2	3	4	5	6	7

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
2	4	1	6	3	8	5	7
4	2	6	1	8	3	7	5
4	6	2	8	1	7	3	5
6	4	8	2	7	1	5	3
6	8	4	7	2	5	1	3
8	6	7	4	5	2	3	1
8	7	6	5	4	3	2	1
7	8	5	6	3	4	1	2
7	5	8	3	6	1	4	2
5	7	3	8	1	6	2	4
5	3	7	1	8	2	6	4
3	5	1	7	2	8	4	6
3	1	5	2	7	4	8	6
1	3	2	5	4	7	6	8
1	2	3	4	5	6	7	8

A Plain Course

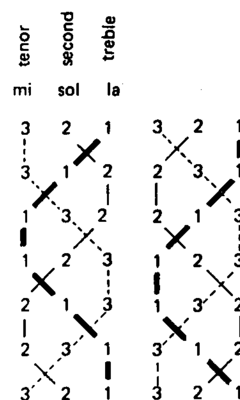
Plain Bob Minimus

Plain Bob Doubles

De spelregels
Met een rijtje bedoelen we één klokslag van elke klok. Geen enkele klok mag namelijk opnieuw luiden vóór alle andere eenmaal hebben geluid.
Eerste regel: Bij het eerste rijtje worden de klokken geluid van hoog naar laag (gegroeid uit het oorspronkelijke rounds-luiden uit de middeleeuwen).
Tweede regel: Alle rijtjes moeten verschillend zijn, behalve het eerste en het laatste (die rounds zijn).
Derde regel: Een klok mag alleen volgorde wisselen met een naaste buur uit het voorgaande rijtje.
Vierde regel: Een klok mag nooit meer dan tweemaal na elkaar op dezelfde plaats in de rij luiden.
Met de kinderen verliep de les als volgt.
Eerst werden rounds van vier klokken op het klokkenspel (xylofoon, ...) voorgespeeld 1234 1234 1234 1234 ..., die meegeneuried konden worden: van de hoogste toon (1) naar de laagste (hier: 4), respectievelijk treble en tenor genoemd.
Dan speelden we 1234/1243 en 1234/2143, en lieten telkens door de kinderen verwoorden wat er gebeurd was. Hierbij werden de termen rijtje, rounds, buur besproken, en ook de spelregels die aan het bord werden gehangen.
Toen gingen de kinderen aan de slag om 'partituren' te schrijven, die ze daarna zelf zouden spelen. Dat laatste maakte het echt spannend.
Om het eenvoudig te houden lieten we met een 'beiaard' van drie klokken beginnen. De beide keren dat ik deze opdracht gaf kwamen de enige twee oplossingen snel en zonder veel problemen. Als een kind tegen de regels zondigde zag het dit snel in. Zowat elk kind vond een oplossing.

123	resp.	123
213		132
231		312
321		321
312		231
132		213
123		123

Eerst speelde een team van drie kinderen dit voor de hele klas. De anderen volgden – mèt partituur. Bij elke uitvoering werd aan de luisteraars gevraagd door handopsteken aan te geven wanneer ze het rijtje van laag naar hoog (321) hoorden.
Dit eiste een sterke concentratie: niet alleen volgen, maar ook echt naar tonen luisteren. Het was duidelijk dat alleen de muzikaal meest geoefenden hierin slaagden. Door de verrassende snelheid waarmee de muzikanten speelden had namelijk niemand tijd om al meelezend te beseffen wanneer het rijtje 321 aan de beurt kwam.
Daarna werd er gedurende ruime tijd geoefend in zes groepjes van drie (in de klas en op de gang). Concentratie, ritme, klankbeleving! Vermoeiend; maar wat een voldoening! Bij de zes 'concertuitvoeringen' bespraken we het verschil in spel als na elk rijtje wel of niet een tel gepauzeerd werd.
Verder werd nog besproken:
het verband tussen beide partituren
het aantal genoteerde (6) en mogelijke (ook 6) verschillende rijtjes. Kinderen die meer systematisch werkten (en zich minder vergisten onderweg), konden óok beter uitleggen waarom de verzameling rijtjes volledig was. Wie meer lukraak werkte had hiervoor geen houvast.
Om het inzicht in de opbouw van het systeem te verhogen lieten we 'looplijnen' kleuren: de plaatsen van elke klok doorheen de partituur werden met een gekleurde lijn verbonden; de regelmaat van het patroon wekte groot enthousiasme, de begrippen symmetrie en verschuiving werden hier spontaan bij betrokken (figuur 9). Er werden boomdiagram-



Figuur 9

In feite werden in de klas de rijtjes van rechts naar links genoteerd, omdat de klankstaven vóór de klas opgesteld stonden zoals op het klavier van een piano: de hoogste rechts, de laagste links.

men getekend voor de partituren (boomdiagrammen zijn niet nieuw voor deze kinderen) (figuur 10).

Figuur 10

Na de pauze konden de kinderen kiezen uit volgende activiteiten:
- partituren schrijven voor 4 klokken
- partituren voor 4 klokken spelen
- looplijnen tekenen op partituren voor 4 klokken (figuur 11).

Figuur 11

Klassikaal bespraken we eerst hoeveel verschillende rijtjes voor 4 klokken mogelijk zijn. Er werd nogal wat gegokt, enkele kinderen wisten dat het boomdiagram de juiste uitkomst zou geven. Ze maakten er nogal artistieke bomen van, maar de regel werd wel ontdekt (figuur 12).

Figuur 12

Aan het eind van die week

De lagere school selecteert niet: in elk zesde leerjaar vindt men alle vormen en gradaties van intelligentie. Voor ieder van hen was ten minste één opdracht aanlokkelijk, sommigen wilden alles doen.
Veel kinderen zondigden onderweg tegen een of meer regels, maar uiteindelijk kwam ongeveer de helft van de klas tot een partituur van acht verschillende rijtjes; sommigen vonden ook kortere partituren. Twee kinderen slaagden erin een partituur van 24 verschillende rijtjes te componeren (het maximum aantal).
Zij waren zo geconcentreerd aan het werk dat ze het oefenen van de muzikanten naast hen niet eens hoorden.

Een vervolg

Dit rijke thema inspireerde nog tot een aantal problemen of opdrachten die later in het jaar konden worden aangeboden, met het voordeel dat de context nog bekend was. Een goede inleving is namelijk even nodig om tot een oplossing te komen als een goede methode.

Voorbeelden van problemen of opdrachten

1 Bij figuur 6
Als 1 mile gelijk is aan 1609 m, gaan er dan meer of minder dan 1609 yd in 1 mile?

0 mile	1 mile
0 m	1609 m

Waar komt 1609 yd ongeveer?

2 Bij figuur 9 en 11
Vlecht met macramé-touwen van verschillende kleuren de partituur van 3, respectievelijk 4 klokken. (De partituur wordt hierbij aangeboden, de looplijnen moeten de kinderen er zelf op tekenen. Al vlechtend zullen ze nog veel intenser 'the method', de regelmaat ervan en de ingrepen hierop, ervaren.)

3 Bij de aangeboden documentatie hoort ook een stukje over de klokkespijs.
Informatie in verband met het gieten van klokken.
Een klok die één octaaf lager klinkt, heeft een tweemaal zo grote diameter, en een ongeveer achtmaal zo groot gewicht.
Naarmate het om kleinere klokken gaat gelden deze verhoudingen in steeds mindere mate.
Klokkespijs: is een legering van 80% koper en 20% tin waaruit klokken gegoten worden. (Een legering van koper en tin heet brons.)
Bij kleinere klokken gebruikt men wel tot 25% tin, om de helderheid van de klank te bevorderen.
Klepel: bestaat uit 40% zink, 57% koper, 1% mangaan, 1% tin en 1% aluminium.
Hoe zwaarder de klepel, des te warmer de klank van de klok.

Opdracht: Stel de legering van een bronzen klok schematisch voor (rechthoek- of cirkeldiagram).
Idem voor de legering van de klepel.

4 Informatie over het luiden
Een luidklok heeft een loshangende klepel.
Een beiaardklok heeft een klepel die aan een toets verbonden is door middel van een kabel. Voor automatisch speelwerk zijn er aan de buitenzijde van de klok één of meer hamers, die ook weer met kabels in beweging gebracht worden.

Engelse namen van beiaarden met 4 tot 10 klokken

Aantal klokken	Naam	Maximum aantal wisselingen
4	Minimus	
5	Doubles	
6	Minor	
7	Triples	
8	Major	
9	Caters	
10	Royal	
11	Cinques	
12	Maximus	

In juli 1963 luidden 8 jonge mannen in Loughborough (Engeland) alle 40.320 mogelijke wisselingen van Major-beiaard in bijna 18 uur zonder ophouden!
Hoe snel luidde de ene klok na de andere (gemiddeld) als we de luidtijd gelijk aan juist 18 uur stellen?
Hoe lang zou het luiden – aan hetzelfde tempo – duren voor alle wisselingen van een Caters-beiaard?

Uit *The Language of Mathematics* door Frank Land:

C	D	E	F	G	A	B	C'
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{48}$

De breuken onder de muziektonen geven de verhoudingen van de lengten van de geluidsgolven weer (zie de les over het geluid: geluid plant zich voort door golven).
Het eerste dat in die rij verhoudingen opvalt is dat hoe lager de toon, hoe groter de verhouding (zie de les van maandag over toonhoogte/grootte).

We vergelijken nu de verhoudingen die passen bij C en C'; dit zijn tonen die juist één octaaf verschillen.
$\frac{1}{24} = 2 \times \frac{1}{48}$ of $\frac{1}{24} = \frac{2}{48}$
Kiezen we de lengte van de geluidsgolf van de hoogste toon als eenheid

C	D	E	F	G	A	B	C'
2							1

dan kunnen we de lengte van de 7 andere tonen zoeken. Bij C past 2 (zie hierboven). Alle andere lengten liggen tussen 1 en 2.
Hoe leid je 1 en 2 af uit $\frac{1}{48}$ en $\frac{1}{24}$?

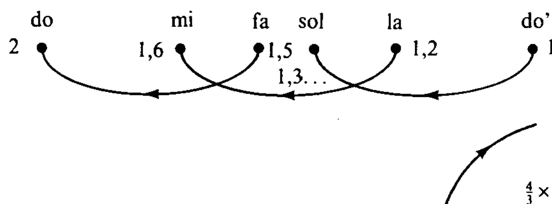
$\frac{1}{48} \rightarrow 1$
$\frac{1}{45} \rightarrow \square$
$\frac{1}{40} \rightarrow \square$
$\frac{1}{36} \rightarrow \square$
$\frac{1}{32} \rightarrow \square$
$\frac{1}{30} \rightarrow \square$
$\frac{1}{27} \rightarrow \square$
$\frac{1}{24} \rightarrow 2$

bv. $48 \times \frac{1}{32} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$48 \times \frac{1}{27} = \frac{48}{27} = \frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1{,}778\ldots$

enz.
$2 > 1{,}778\ldots > 1{,}6 > 1{,}5 > 1{,}33\ldots > 1{,}2 > 1{,}067\ldots > 1$

Tussen sommige tonen stellen we eenvoudige verhoudingen vast. De verhouding tussen de lengte van de geluidsgolven van fa en de lagere do is dezelfde als die tussen la en de lagere mi, en ook tussen de hoge do en de (lagere) sol.



Slotbemerking

Ik haalde uit het onderwerp change-ringing alleen dat beetje wiskunde, dat in het basisonderwijs past. Maar de Engelse klokken beieren over hun mooie land een rijke, maar hier weinig gekende, toepassing van groepentheorie uit. Welke leraar van het middelbaar onderwijs verwerkt die eens tot een lessenreeks voor zijn klas? Ik verheug mij nu al op het verhaal hierover op een studiedag van de VVWL!

Dit artikel is tevens verschenen in 'Wiskunde en Onderwijs', twaalfde jaargang, nr. 45.

Literatuur

Prof. F. van der Blij: *Doodsklokken over het IOWO* Wiskobas-bulletin, jrg. 9 nr. 6, pag. 4-6, okt. 1980
Hierin worden vermeld:
het Engelse tijdschrift *The Ringing World*
Lejaren Hiller en Raveesh Kumra: *Composing Algorithms II by means of Change Ringing*, Interface (vol.8, 1979, pag. 129-168)
F. J. Budden: *The Fascination of Groups*, Cambridge University Press, 1978
T. J. Fletcher: *Campanological Groups*, American Mathematical Monthly 63, 1956, pag. 619-626
B. D. Price in The Mathematical Gazette 1969
The Computer Journal (vol. 3 and 13)
Bernard Jaulin: *L'art de sonner les cloches*, een artikel in een mij onbekend tijdschrift; het artikel bezit ik wel
Edgar Shephere: *The Sound of the Bells*, Record Books, Thomson House, London 1964, met fonoplaat
The New Grove Dictionary of Music and Musicians, Stanley Sadie, vol. 4, 1981: *Change Ringing*, pag. 129-134
Dorothy Sayers: *The nine Tailors* (detective-story)
John Camp: *Bells and Bellringing*, Discovering nr. 29, Shire Publications ltd 1975
Winfred Ellenhorst: *Handbuch der Glockenkunde*, Verlag der Martinus-Buchhandlung, Weingarten 1957

Over de auteur
An Mogensen-Van Werveke is sinds 1958 werkzaam in het Rijksnormaalonderwijs te Brugge en Gent. Ze is lid van de leerplancommissie voor het vernieuwd wiskundeonderricht in het Rijksbasisonderwijs.

${}^{g}\log a = {}^{p}\log a \cdot {}^{g}\log p$ met het groeimodel

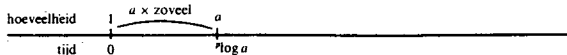
A. W. Boon

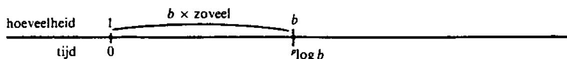
Op school werken wij met het HEWET-boekje 'Exponenten en Logaritmen'. Exponenten en logaritmen worden daarin geïntroduceerd met behulp van een groeimodel. ${}^{p}\log a$ wordt gedefinieerd als de tijd nodig om $a\,\text{m}^2$ (kroos) te krijgen bij groeifactor p. (Op tijdstip 0 is er $1\,\text{m}^2$) Met behulp van dit model wordt ook de eigenschap $\log a + \log b = \log ab$ aannemelijk gemaakt.
Op het moment echter dat de eigenschap ${}^{p}\log a = \dfrac{{}^{g}\log a}{{}^{g}\log p}$ afgeleid moet worden, wordt het groeimodel verlaten. Dat is jammer, want dat model heeft tot op dat moment prima gefunctioneerd. Een vraag van een leerling of deze eigenschap ook in 'groeitermen' was te vertalen, was de aanleiding tot de nu volgende poging.

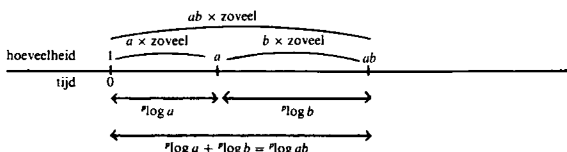
1 Eerst een iets gewijzigde definitie:

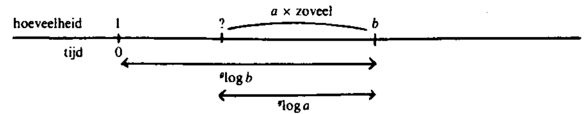
${}^{p}\log a$ is de tijd nodig om te ver-a-voudigen bij groeifactor p.

Nu volgt direkt:



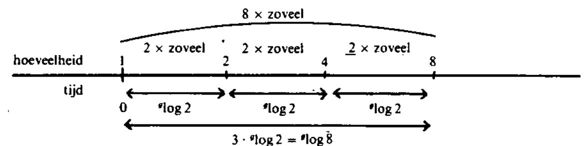




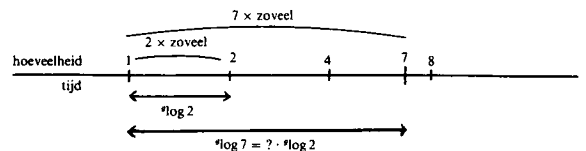


Op tijdstip ${}^{g}\log b - {}^{g}\log a$ moet er $\frac{b}{a}$ aanwezig geweest zijn. Dus ${}^{g}\log b - {}^{g}\log a = {}^{g}\log \frac{b}{a}$.

2 Nu ${}^{g}\log a = {}^{p}\log a \cdot {}^{g}\log p$. We nemen $p = 7$ en $a = 2$.
${}^{g}\log 2$ is de tijd nodig om te verdubbelen bij groeifactor g.
Als je driemaal zolang wacht, is de zaak drie maal verdubbeld, dus ver-8-voudigd. Daarbij doet het er niet toe hoe groot g is!



Dus ${}^{g}\log 8 = 3 \cdot {}^{g}\log 2$, omdat er 3 factoren 2 in 8 zitten. $8 = 2^3$.
Maar hoe zit het nu met bijvoorbeeld ${}^{g}\log 7$ en ${}^{g}\log 2$?



Je moet nu weten hoeveel 'factoren' 2 er in 7 zitten. Dat zijn er ${}^{2}\log 7$, want $7 = 2^{{}^{2}\log 7}$.
Dus ${}^{g}\log 7 = {}^{2}\log 7 \cdot {}^{g}\log 2$, of ${}^{2}\log 7 = \dfrac{{}^{g}\log 7}{{}^{g}\log 2}$.

Over de auteurs:

A. W. Boon is sinds 1970 leraar aan het Christelijk Gymnasium 'Sorghvliet te Den Haag.

'Ja maar, ik ben gewend . . .'

Over veranderingen binnen het wiskundeonderwijs

H. G. B. Broekman, J. M. J. Weterings

1 Inleiding

Het rommelt binnen wiskundeland. Binnen de opvattingen over het wiskundeonderwijs en ook het voorgeschreven wiskundeleerplan zijn de laatste jaren grote veranderingen te zien. Deze veranderingen worden niet door iedereen toegejuicht en leiden dan ook niet altijd tot daadwerkelijke veranderingen binnen de praktijk van het onderwijs. Dat moge blijken uit veel gehoorde uitspraken van docenten wiskunde: 'Wiskunde A is veel te moeilijk voor de leerlingen. Heb je drie ingeklede opgaven voorgedaan, moeten de leerlingen zelf een vierde volgens hetzelfde principe maken, weten zij niet hoe ze het moeten aanpakken' of 'Zo'n nieuwe versie van Moderne Wiskunde is wel leuk, maar het kost veel te veel tijd en je komt niet aan je eindexamenprogramma toe. Ik denk dat we toch maar weer een ander boek zoeken'.

Ook binnen de opleidingen zijn vaak kritische geluiden te horen, nu van studentzijde. Ten dele hebben die te maken met de veranderingen van de schoolwiskunde, maar ze hangen tevens samen met de manier van opleiden. Een student omschreef het aldus in zijn stageverslag: 'Aan het begin van de cursus vroeg ik me nogal eens af waar we mee bezig waren en had ik er een hard hoofd in het hele jaar zo bezig te zijn'.

Schijnbaar gaat het hier om verschillende zaken: enerzijds gaat het om leraren binnen het voortgezet onderwijs, anderzijds gaat het om studenten in opleiding; enerzijds gaat het om veranderingen binnen de schoolwiskunde, anderzijds gaat het om problemen met de opleiding. Er is ons inziens echter ook een duidelijke kern van overeenkomst: veel leraren en studenten worden geconfronteerd met een voor hen nieuwe manier van werken en/of een nieuwe inhoud van de leerstof. Zowel die nieuwe inhoud als die andere wijze van werken roepen nogal eens een zekere weerstand op. In een tweetal artikelen willen wij ingaan op die manier van werken en de mogelijke weerstanden die die oproept. In dit eerste artikel richten wij ons op de lerarenopleiding. In een volgend artikel willen wij aandacht besteden aan hoe docenten binnen het voortgezet onderwijs op een andere manier omgaan/om kunnen gaan met die 'nieuwe wiskunde'.
In paragraaf 2 schetsen wij eerst het probleem waar wij als leraren-opleiders mee geconfronteerd worden. Vervolgens geven wij, in paragraaf 3 een aantal voorbeelden van hoe wij in eerste instantie met die problemen probeerden om te gaan, en wat niet hielp (eigenlijk nonvoorbeelden dus). Daarna schetsen wij een bepaalde aanpak, die meer vruchten afwerpt (paragraaf 4). Tot slot zullen wij een en ander in een kader zetten.

2 Schets van het probleem

Als docenten aan een opleiding voor onderwijsgevenden zitten wij vaak met het volgende dilemma. Enerzijds hebben wij onze doelstellingen en uitgangspunten aangaande het opleidingsonderwijs en, in ons geval, het wiskundeonderwijs. Belangrijke punten daarbij zijn het leren reflecteren door studenten en het systematisch kunnen omgaan met, al dan niet wiskundige, problemen. Ook de veranderde doelstellingen aangaande de wiskunde binnen het voortgezet onderwijs spelen een belangrijke rol. Als opleiders willen wij daarvan zoveel mogelijk aan onze studenten meegeven.
Anderzijds krijgen wij te maken met studenten wier achtergrond, manier van werken en uitgangspunten vaak erg verschillend zijn van die van ons. Bijvoorbeeld:

- Als we studenten vragen hoe zij leerlingen zouden leren optellen dan horen we veelal uitspraken in de trant van: eerst moet de leerling dit doen, dan moet hij dat doen. Veel studenten blijken vaak een algoritmische kijk op de wiskunde te hebben.
- Als studenten de lerarenopleiding binnenkomen,

horen we vaak opmerkingen in de trant van 'Vertel me maar wat ik moet doen'. In dat kader is een veel gehoorde wens van studenten aan het begin van de cursus dat we ze vooral vertellen hoe ze orde moeten houden.

- Of, als zij bepaalde problemen op te lossen krijgen, passen ze als een kip zonder kop een algoritme toe, of proberen dat toe te passen. Ze gaan meestal niet na op welke manieren het probleem op te lossen is en wat de meest efficiënte, dan wel de meest eenvoudige manier is; er wordt geen plan gemaakt, gewoon 'gedaan'.

Uit deze voorbeelden zal duidelijk zijn hoe studenten soms denken over onderwijs in het algemeen en wiskundeonderwijs in het bijzonder. Daarbij gaat het in onze ogen om een beperkte dan wel minder effectieve kijk op het onderwijs.

Hier zit voor ons een belangrijk knelpunt: onze uitgangspunten en visie kunnen soms zo verschillend zijn van die van de studenten dat het haast onmogelijk lijkt de kloof tussen ons en de studenten te overbruggen. Dit wordt extra bemoeilijkt door het feit dat de manier van werken en denken van de studenten invloed heeft op hoe zij binnen de lessen didactiek met de leerstof en hun ervaringen omgaan.

Stel dat het al lukt om die kloof te overbruggen, dan doemt er nog een ander probleem op. Binnen de literatuur over beginnende leerkrachten leest men veelvuldig dat een beginnend docent vrij vaak een teruggang heeft in autoritair-conservatieve richting (vgl. Günther en Massing in Verlinden en Weterings, 1983). Anders gezegd, de 'mooie' ideeën die zij geleerd hebben op de opleiding blijken in de praktijk weinig wortel te schieten.

In de volgende paragraaf geven wij allereerst een aantal voorbeelden van hoe wij met bovenbeschreven problematiek geconfronteerd werden en hoe wij daar in eerste instantie mee omgingen.

3 Nonvoorbeelden

In eerste instantie probeerden wij studenten duidelijk te maken hoe zij leren en werken en wat de voor- en nadelen daarvan zijn. Dit sloeg niet altijd aan, omdat studenten het gevoel hadden dat wat ze deden niet zinvol was voor het onderwijs. Anders gezegd, als wij studenten (al dan niet wiskundige) problemen opgaven om alleen of in groepjes op te lossen dan waren zij van mening dat die problemen niet representatief waren voor de wiskunde binnen het voortgezet onderwijs, of dat het eigenlijk geen wiskunde was. Ook als wij ze rollenspelen lieten spelen, om bijvoorbeeld aspecten van samenwerken te verduidelijken, hadden studenten moeite een en ander in verband te brengen met hun toekomstige rol als docent.

Veelvuldig voorkomende opmerkingen waren dan 'Dat weet je toch' of 'Dat is altijd zo' of 'Ja, dat is natuurlijk of logisch'. De ondertoon die meestal doorklonk was in de geest van 'Ja, als we hier nog over moeten discussiëren dan had ik beter thuis kunnen blijven'. Achter deze opmerkingen en houdingen zit een aantal verborgen theorieën, in feite hypothesen. Deze hebben hun invloed op de denkbeelden van de studenten over het onderwijs in het algemeen, hun rol daarin en over het opleidingsonderwijs.

Een voorbeeld ter verduidelijking.

Binnen de opleiding komt een opdracht 1-50 voor (zie ook Vedder, 1984 blz. 20). Hierbij gaat het om een probleem met kaartjes, genummerd van 1 tot en met 50. De vraagstelling luidt als volgt: Ik heb vijftig genummerde kaartjes op een rij liggen, met de cijfers naar boven, in de natuurlijke volgorde. Vervolgens draai ik elk tweede kaartje, daarna elk derde kaartje etc. om. Welke getallen zijn uiteindelijk zichtbaar?

Studenten krijgen deze opdracht om tweeërlei redenen. Wij willen middels deze opdracht stilstaan bij enerzijds het omgaan met en het aanpakken van wiskundige problemen; anderzijds zien wij deze opdracht als aanknopingspunt om in te gaan op zaken als samenwerken binnen groepjes.

Studenten maken de opdracht meestal wel, maar hebben moeite met de nabespreking. Ze zien wel, bij de nabespreking, dat er verschillen in oplossingsstrategieën zijn en dat er verschillen zijn in samenwerken, maar ervaren dat niet als problematisch. Het is meer een gegeven, dat je kunt observeren. Directe consequenties voor hun toekomstige rol binnen het onderwijs verbinden zij er niet aan, want 'deze wiskunde komt niet voor binnen het

voortgezet onderwijs' en 'daar werk je toch niet in groepjes'.

Een ander voorbeeld hangt samen met het zgn. klokprobleem (vgl. Broekman, 1985).
Studenten vinden zo'n soort opgave als 'puzzeltje' wel leuk. Ze beginnen vervolgens met het opstellen van een aantal vergelijkingen met een aantal onbekenden. Analyse vooraf of, en zo ja hoe, dit probleem wellicht makkelijker aan te pakken is, vindt vaak niet plaats. Discussie achteraf wordt bemoeilijkt door het gegeven dat studenten een oplossing hebben gevonden en niet geneigd dan wel gewend zijn terug te kijken op hoe zij het probleem hebben aangepakt en welke alternatieven, met voor- en nadelen, er zijn. Ook komen zij merendeels niet toe aan de vraag *waarom* ze zo gehandeld hebben als zij gedaan hebben.

De hierboven beschreven manier van werken zegt iets over hoe veel studenten omgaan met een stuk wiskunde, maar ook hoe zij zullen omgaan met hun ervaringen in de klas. Steeds weer krijgen wij te maken met studenten die gericht zijn op de oplossing, of algemener geformuleerd, het toepassen van een methode die werkt. Als zij die eenmaal hebben dan zijn ze minder geneigd stil te staan bij hoe ze te werk zijn gegaan en de voor- en nadelen daarvan. Heel duidelijk komt dat tot uiting bij het opnemen op video van door student gegeven lessen aan medestudenten. Bij de nabespreking staat voor de studenten eigenlijk alleen de volgende vraag centraal: 'Wat deed ik goed of fout en hoe moet ik het de volgende keer doen?'
Iets dergelijks geldt ook voor het dagboek dat onze studenten bijhouden. Als wij een probleem, zoals bijvoorbeeld de opdracht 1-50, hadden aangepakt en de volgende bijeenkomst aan de studenten vroegen wat zij er in hun dagboek over hadden opgeschreven, dan kwam er niet zoveel uit. Meestal bleef het beperkt tot een beschrijving van wat men gedaan had.
Natuurlijk spelen bij bovenbeschreven problematiek ook andere factoren een rol. Wij noemen bijvoorbeeld: studenten aan een ULO (universitaire lerarenopleiding) staan meestal aan het eind van hun studie en aan het begin van een loopbaan. Voor hen speelt natuurlijk, i.v.m. de verdere planning van hun toekomst, heel duidelijk de vraag of zij les kunnen geven en of er voor hen een toekomst in het onderwijs zit. We willen daar binnen dit stuk niet op ingaan.

4 Voorbeelden

In paragraaf 3 hebben wij aan de hand van een aantal ervaringen de kern van het probleem proberen duidelijk te maken:
We willen dat studenten op een bepaalde manier met het onderwijs omgaan. Omdat zij die niet gewend zijn verzetten zij zich hier tegen, wat op den duur ook zijn consequenties voor de rest van hun leerervaringen op de opleiding kan hebben.

Als opleider stellen wij ons o.a. tot doel studenten te leren op een zinvolle manier om te gaan met hun ervaringen. Dit zijn zowel ervaringen met het omgaan met een stuk wiskunde als ervaringen met betrekking tot hun rol als docent. Daarbij menen wij expliciet de volgende beginsituatie in acht te moeten nemen: veel studenten zijn niet gewend, staan zelfs afwijzend tegenover het terugkijken op hun ervaringen. Onze conclusie is dat we de cursus zo moeten maken dat deze enerzijds de studenten aanspreekt en hen anderzijds motiveert tot nadere analyse van bepaalde zaken. Belangrijk uitgangspunt bij de veranderingen in onze cursus is dat inhoud en werkwijze aan de ene kant aansluiten bij wat studenten verwachten en aan de andere kant de potentie hebben om studenten op een ander niveau van functioneren te brengen. Daarbij moeten wij wel vermelden dat aansluiten bij wat de studenten verwachten iets anders is dan doen wat de studenten willen.
Hieronder zullen wij aan de hand van een tweetal elementen uit de cursus deze veranderde opzet beschrijven.

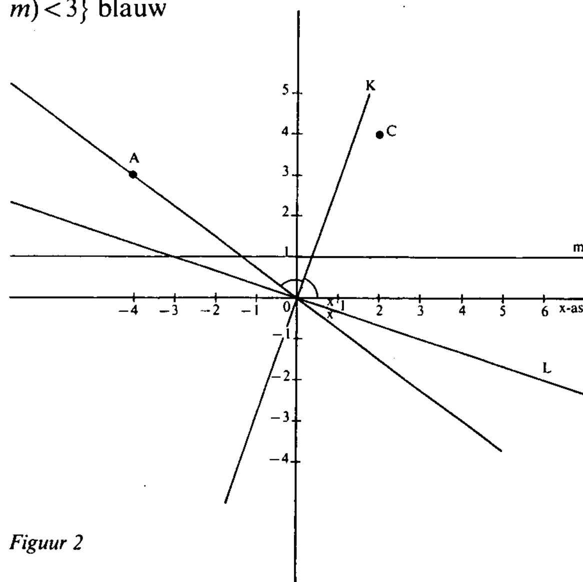
4a *Proefwerk*
Het onderwerp proefwerken is een dankbaar en rijk onderwerp binnen het opleidingsonderwijs. Dankbaar in die zin dat het onderwerp in eerste instantie duidelijk is en onomstreden; rijk in die zin dat het onderwerp als inleiding en opstap kan dienen tot andere, ook onderwijskundige, onderwerpen op verschillende niveaus.
In eerste instantie zijn wij, als we met het onder-

werp proefwerk beginnen, zeer technisch en, in de ogen van de student, doelgericht bezig. Vragen die aan de orde komen zijn:
- wat zijn goede proefwerkvragen en wat zijn minder goede proefwerkvragen?
- als je let op een proefwerk als geheel, welke punten zijn dan van belang?

Bij het behandelen van deze vragen proberen wij zoveel mogelijk te starten met opgaven die studenten voor een stage of 1-1 (vgl. Vedder, 1983) gemaakt hebben. In deze fase komen al belangrijke verschillen tussen studenten naar boven, verschillen die aanleiding geven om te gaan zoeken naar de achterliggende vooronderstellingen.
In concreto betekent dit dat wij in eerste instantie ingaan op eisen van goede proefwerkvragen als validiteit, efficiëntie etc. (vgl. Broekman en Weterings, 1985). Doordat wij gebruik maken van echte, al dan niet door de studenten ingebrachte, opgaven komen er echter al gauw andere onderwerpen op een ander niveau ter sprake.

Wij noemen:

* Een student heeft de volgende opgave gemaakt voor een proefwerk:
  $A(-4,3)$, $C(2,4)$
  $m // x$-as en m door punt $(0,1)$
  $\{P \mid d(P, \text{lijn } AO) = d(P, x\text{-as})\} = k \cup l$
  Neem figuur 2 over.
  Arceer $\{P \mid d(P, \text{lijn } AO) < d(P, x\text{-as}) \quad d(P, m) < 3\}$ blauw



Figuur 2

De andere studenten zijn in eerste instantie verward door de hoeveelheid en complexiteit van de notaties. In deze zin is de vraag dus ook minder efficiënt. Reactie van de student n.a.v. opmerkingen in deze richting is dat de leerlingen dit soort opgaven daarvoor gehad hebben en er *dus* mee bekend zijn. Zo'n opmerking is aanleiding om bijvoorbeeld de volgende vooronderstellingen te onderzoeken:
- In hoeverre is de student er bewust dan wel onbewust op gericht dat leerlingen een bepaald type vragen leren herkennen i.t.t. het doelgericht problemen aan te pakken. Welke visie op wiskunde zit hier achter?
- Gaat de student er niet vanuit dat geldt 'wat leerlingen gehad hebben kennen zij ook'.

* Een student geeft alleen opgaven die aan het eind van een hoofdstuk voorkomen.
* Een student geeft een zgn. 'inzicht-opgave'.

Bij de laatste twee voorbeelden komt al gauw het begrip doelstellingen om de hoek kijken en de vraag of je van leerlingen kunt verwachten dat zij iets kennen dat hun niet onderwezen is. In feite komt hier dan de problematiek van transfer om de hoek kijken.

* Nakijken van een proefwerk.

Als studenten eenzelfde proefwerk van een of meer leerlingen nakijken zullen zij er verschillende punten voor geven. Deze verschillende waarderingen zijn aanleiding om achterliggende visies en uitgangspunten te onderzoeken.

* Studenten krijgen de opdracht bij een leerling een meerkeuzetoets af te nemen (zie Weterings en Broekman, 1985).

Deze opdracht kan tot de conclusie leiden dat je als leerling eigenlijk specifieke vaardigheden moet bezitten om zo'n proefwerk goed te maken. Ook kan dit onderwerp gelegenheid geven om stil te staan bij de voor- en nadelen van dit soort toetsen. Menigmaal komt ook de vraag naar boven, voor sommige studenten voor het eerst, waarom leerlingen binnen het voortgezet onderwijs zich met wiskunde moeten bezighouden.

* Studenten stellen proefwerkvragen op waarbij in de context alleen jongens voorkomen.

Wij merken dat analyse van dat feit, studenten meer zegt, dan de literatuur over geslachtsspecifieke socialisatie en selectie. Kan men bij de laatste nog wel eens vluchten in een sociaalwenselijke houding, in het eerste geval kan men niet om vragen heen als 'Hoe ga ik zelf met jongens en meisjes in de klas om?' of 'Is wiskunde een jongensvak of wordt het zo gemaakt?'

Men ziet hoe een onderwerp als proefwerken studenten aanleiding kan geven om zich meer te verdiepen in onderwijskundige of leerpsychologische onderwerpen, dan wel dat zij zich op een ander niveau dan 'Hoe moet ik lesgeven' gaan bezighouden met het onderwijs en hun positie daarin.
Gaandeweg zie je als opleider ook dat studenten zich andere vragen gaan stellen:
Eerst: '*Hoe moet ik lesgeven*'.
Vervolgens, als men meerdere malen geconfronteerd wordt met alternatieven die, binnen een bepaald kader, ook zin hebben: *Kan het anders* en zo ja, *Hoe kan het anders*? Studenten staan dan ook meer stil bij vooronderstellingen die aan een bepaalde wijze van lesgeven ten grondslag liggen.
Weer later zien zij dat hun mening ook maar een van de vele is en dat die mening voor een groot deel is gebaseerd op vooronderstellingen. Deze vooronderstellingen kunnen onderzocht worden op bijvoorbeeld hun relevantie of waarheidsgehalte ('*Wat zit er eigenlijk achter*' en '*Klopt wel wat jij daar zegt*'). Ook kunnen dan vragen naar ontstaansgeschiedenis van een bepaalde opvatting naar boven komen ('*Waarom denk of doe ik zo*'). Een schot voor open doel voor een opleider zijn dan opmerkingen in de trant van '... maar mijn (wiskunde)leraar deed of zei vroeger altijd ...'
Volgens ons zijn studenten eigenlijk nu pas in staat na te gaan wat zij willen binnen het onderwijs en hoe zij hun rol als docent zien. Wij komen hier later op terug.

4b *Wiskunde en wiskundeonderwijs*
De laatste jaren zijn er een aantal ontwikkelingen op gang gekomen t.a.v. de wiskunde-inhoud in het voortgezet onderwijs en t.a.v. het doceren van wiskunde. Wij noemen bijvoorbeeld de HEWET en de discussie t.a.v. het al dan niet verplicht stellen van wiskunde op het havo en het vwo. Gezien hun achtergrond zijn veel studenten meestal niet bekend met deze veranderde ideeën. Het lijkt dan ook niet meer dan logisch dat je studenten in aanraking brengt met deze veranderde opvattingen en de consequenties daarvan, hetgeen wij dan ook doen.
Verder zullen studenten een aantal didactische vaardigheden moeten leren zoals bijvoorbeeld het analyseren van leerteksten en het ordenen van leerstof opdat zij zinvol les kunnen geven.
In zekere zin gaat het hier om de kern van de vakdidactiek. Een instrumentarium, waarvan wij vinden dat elke wiskundedocent die moet bezitten. Ook nu geldt weer dat wij tijdens het behandelen van deze onderwerpen ons niet alleen tot die onderwerpen beperken. Juist doordat wij studenten bijvoorbeeld confronteren met een andere invulling van wiskunde, krijgen wij de gelegenheid ook te gaan werken aan bepaalde vooronderstellingen van de studenten. Iets wat in onze ogen noodzakelijk is, willen de studenten daadwerkelijk later binnen die veranderde en veranderende omstandigheden zinvol kunnen werken.

In bijlage 1 geven wij een aantal opgaven die studenten te maken krijgen. De opgaven 1-4 worden door de studenten gewoon gemaakt. Opgave 5 geeft problemen. Studenten hebben hierbij het idee dat het niet om wiskunde gaat, ofwel het past niet bij hun beeld van de wiskunde. Verder volstaan ze met één oplossing of staan niet stil bij de vooronderstellingen die bij hun oplossing spelen: het oplossen van opgave 1 m.b.v. vergelijkingen vooronderstelt vaak dat wat betaald moet worden continu evenredig is met de tijd; wat in de praktijk meestal niet opgaat. De studenten leggen vaak niet de link tussen enerzijds de context van het probleem en anderzijds de wiskundige oplossing. Zij beperken zich alleen tot het wiskundig algoritme. Hiermee samenhangend geven wij studenten ook wel eens een soort opgave als in bijlage 2. Het is frappant hoe studenten telkenmale terugvallen in het aangeleerde stramien (aantallen cubussen, of is het toch het gewicht, worden afgekort tot k, etc. en alles wordt omgezet in een aantal vergelijkingen zoals $k=b+s$; $2k+b=8s$). Een andere methode zien ze niet of wordt minder gewaardeerd, 'omdat het niet algemeen is'. Ook nu komen weer een aantal voor-

onderstellingen t.a.v. de wiskunde of het wiskunde bedrijven naar boven.

Een tweede voorbeeld van hoe wij te werk gaan hangt samen met ordening en structurering van wiskundeleerstof. Als voorbeeld (of nonvoorbeeld) om te oefenen geven wij de studenten vaak een deel van een paragraaf uit een niet meer gangbare methode. Binnen deze paragraaf staat dan een onderwerp centraal als afstand tussen twee punten, Pythagoras of een ander onderwerp waarbij de leerlingen uiteindelijk een algoritme leren. Bij het doorspreken van de opzet komt niet alleen de vraag aan de orde hoe je de paragraaf zou structureren. Al snel komt bijvoorbeeld ook de vraag naar boven of het hier om 'echte wiskunde' gaat. Een student zei eens letterlijk: 'Ach die regeltjes, ik vind dat geen wiskunde. Vroeger vond ik ze ook niet belangrijk'. Een andere student merkte toen op dat hij dacht dat het net om die regeltjes ging in de wiskunde. Twee verschillende meningen met verschillende consequenties voor de latere lespraktijk. Alleen, wie heeft er gelijk?
Ons uitgangspunt moge duidelijk zijn. Als een rode lijn door het programma komt steeds weer het onderwerp 'visie op wiskunde en wiskundeonderwijs' naar boven. In plaats van uitgebreid in te gaan op een topic als 'doelstellingen', laten wij dit soort onderwerpen naar boven komen binnen allerlei specifieke opdrachten.

De hierboven aan de hand van voorbeelden getypeerde werkwijze kunnen we als volgt omschrijven. In eerste instantie starten wij met onderwerpen die studenten aanspreken en die verder van belang zijn voor de latere lespraktijk. Deze onderwerpen liggen vaak op vakdidaktisch terrein. Behalve dat studenten een aantal vaardigheden en kennisinhouden leren bij het desbetreffende onderwerp, heeft elk onderwerp de potentie om studenten te laten leren over zichzelf; om vooronderstellingen en uitgangspunten die studenten hebben over onderwijs en wiskunde boven tafel te laten komen. Het materiaal is ook zodanig gemaakt dat je kunt doorstoten naar een ander niveau. Een aantal vragen zal in een of andere vorm steeds terugkomen:
- op welke manieren kan ik iets doen?
- welke vooronderstellingen en consequenties zitten daarachter?
- welke vooronderstellingen hanteer ik zelf?
- is er een mogelijke reden waarom ik zo doe/leer zoals ik doe?
- wat zijn de alternatieven?

Het materiaal wordt zodanig gekozen dat het mogelijkerwijs controversies oproept tussen studenten. Daarbij zullen wij als docent in eerste instantie bepaalde vragen stellen. Verderop in de cursus zullen de studenten zichzelf steeds meer die vragen gaan stellen. Onze taak zal er dan uit bestaan samen met de studenten na te gaan hoe zij met hun ervaringen omgaan. De hier geschetste werkwijze vertoont overeenkomst met die beschreven door Lagerwerf (1986).

5 Theoretische achtergrond: reflecteren

In het verlengde van het onderwerp van dit artikel liggen twee discussiepunten uit de hedendaagse opleidingsliteratuur: allereerst de problematiek van beginnende leerkrachten in het algemeen, met in het bijzonder de daarmee gepaard gaande terugval in progressiviteit bij studenten als zij eenmaal van de opleiding zijn. Verder de noodzaak om studenten te leren reflecteren tijdens opleiding.
Wij willen op beide hieronder kort ingaan.
Binnen de literatuur over *de problematiek van beginnende leerkrachten* wordt meerdere malen vermeld dat beginnende docenten al vrij snel de zgn. progressieve ideeën, die zij op een opleiding hebben geleerd, laten vallen.
Met name Zeichner en Tabachnick (1981), in navolging van Lortie, hebben laten zien dat studenten eigenlijk weinig progressieve ideeën hebben geleerd tijdens hun opleiding. Volgens Shipman (in Zeichner en Tabachnick, 1981) vindt er weinig verandering van attitude plaats op een lerararenopleiding (vgl. Verlinden en Weterings, 1983). Studenten hebben al jaren onderwijs gevolgd voor zij naar een lerarenopleiding komen. Hun socialisatie tot leerkracht is dus al veel eerder begonnen. Daarbij spelen ook folklore en de media een ondersteunende rol. Lasley (1980) wijst in dit verband op het stereotype beeld van een leerkracht op TV en in films. Een van onze studenten schreef hierover in zijn stageverslag o.a. het volgende: 'In dit hoofdstuk ga ik in op een favoriet onderwerp uit het schoolleven: De orde. Dit onderwerp komt in te-

genstelling tot het vorige ook veel in de cultuur voor: Wie kent niet de conférences van Paul van Vliet over de schooltijd (o.a. over Dhr. Donker, die geen orde kon houden) en die van Fons Jansen als schooljongen en wie heeft niet Bint, met zijn stalen orde, van Bordewijk gelezen? Vele docenten blijken last te hebben met de orde, hoe lang ze ook in het onderwijs zitten.' Studenten hebben dus al een beeld over het onderwijs en hun rol binnen het onderwijs voordat zij naar een lerarenopleiding gaan. De invloed die dat heeft op hun ideeën over het onderwijs is vrij groot maar wordt vaak onderschat. Gevolg is dat studenten schijnbaar moderne opvoedingsideeën leren tijdens de opleiding. Maar, omdat de gevormde vooronderstellingen van studenten meestal niet onderzocht en ter discussie worden gesteld, komen die op de langere duur weer boven. Anders gezegd, wat studenten leren tijdens een opleiding is slechts een dun, mogelijkerwijs sociaal wenselijk, vernislaagje. Eenmaal in de eigen lespraktijk is dit laagje er weer snel van af en komen de oude ideeën, gevormd voordat men naar de lerarenopleiding ging, weer boven. De nieuw gevormde ideeën tijdens de opleiding hebben de eerder door allerlei socialisatieprocessen gevormde vooronderstellingen en uitgangspunten niet kunnen vervangen.
Hier ligt dus een belangrijke, zo niet de belangrijkste taak voor een opleidingsdocent. Hij moet er voor zorgen dat studenten hun ondergane socialisatieproces gaan onderzoeken en op consequenties bezien. Hij moet er voor zorgen dat studenten zicht krijgen op hoe hun handelen, en dus ook leren, bepaald en mogelijkerwijs beperkt is door eerder opgedane ervaringen.
In feite gaat het hierboven over wat men in de literatuur ook wel *reflecteren* noemt. Nu is reflecteren een vaak gebruikt en meestal ook vaag gebruikt begrip. Wat het precies inhoudt is niet altijd even duidelijk, laat staan dat men vertelt hoe het aan te leren is. Wij willen hier niet uitgebreid op die discussie ingaan (zie Verlinden en Weterings 1983 en Vedder e.a. 1985). Een student reflecteert in onze ogen als hij zicht probeert te krijgen op hoe hij handelt en leert, en (als hij zicht probeert te krijgen) op de achtergrond van zijn handelen en leren. In het verlengde hiervan speelt dan weer de vraag hoe hij anders zou kunnen handelen. Reflecteren is dus het onderzoeken van de eigen handelingstructuur. (Voor een definitie van de laatste term zie Van Parreren, 1979, blz. 5). In plaats van handelingsstructuur ziet men ook wel eens de term subjectieve kennis of subjectieve theorieën (vgl. bijv. Peters, 1985).

Reflecteren is geen vaardigheid die men van nature bezit. Integendeel zelfs als wij mogen afgaan op de weerstand die studenten soms hebben om op hun ervaringen terug te kijken. Zeichner en Liston zeggen daarover: 'Our experience has taught us that much unlearning has to go on for many students before they are willing to accept the need for a more reflective approach to teaching' (1985, blz. 39). Deze weerstand hangt volgens ons samen met het feit dat het bij reflecteren gaat om een ander leerproces dan gebruikelijk is voor de studenten. Tevens gaat het om een leerproces over een andere inhoud dan gebruikelijk, nl. een waarbij je vooral over *jezelf* leert. Een leerproces dat mogelijkerwijs kan leiden tot veranderingen in je persoonlijkheid. Dit veranderen is een moeizaam en vaak pijnlijk proces, zeker als het gaat om ingeslepen ideeën.
Men zal als opleider de studenten moeten leren reflecteren; daarbij zal men rekening moeten houden met een bepaalde weerstand bij studenten. Hoe men volgens ons studenten kan leren reflecteren komt tot uiting in de door ons gekozen werkwijzen:
In eerste instantie is reflecteren een groepsactiviteit. Bij de behandeling van een aantal onderwerpen welke voor een toekomstig docent van belang zijn (bijvoorbeeld proefwerken, maar ook huiswerk, structureren van een stuk leerstof of orde) laat aanvankelijk alleen de instituutsbegeleider steeds een aantal vragen naar boven komen. Aangrijpingspunt vormen de verschillende invullingen van studenten t.a.v. een bepaald onderwerp. Juist door die verschillende invullingen te onderzoeken op *vooronderstellingen en consequenties* leren studenten dat hun invulling ook maar een van de vele is en dat die invulling niet zomaar ontstaan is, maar een achtergrond heeft (onderzoek op *bepaaldheid*). Tevens leren studenten een aantal, vaak vakdidactische, vaardigheden en zekere kennis, die voor hen later van belang is. Wij menen dat de vragen die een opleider in eerste instantie inbrengt in de groep op den duur een kader kunnen vormen waarmee studenten zelf naar hun ervaringen en planningen

kunnen kijken. Reflecteren zal dus steeds meer een persoonlijke activiteit worden. Daarbij kan het voorkomen dat niet alle studenten aan alle vragen toekomen.
Het moge duidelijk zijn dat reflecteren voor ons meer is dan het alleen bijhouden van een log- of dagboek. Alleen de opdracht om een dagboek bij te houden is zinloos. Als men wil dat studenten, middels een logboek terugkijken op hun ervaringen, dan zal men de studenten ook het instrument, i.c. een aantal vragen, moeten aanleren waarmee zij naar die ervaringen kunnen kijken. Juist door in eerste instantie die vragen aan de orde te laten komen in de groep, leren de studenten de noodzaak zien van dat soort vragen. Door nu regelmatig bij allerlei onderdelen uit het curriculum terug te komen op die vragen en stelselmatig het karakter van die vragen uit te breiden zullen studenten steeds meer die vragen zelf gaan gebruiken, ook buiten de groep en zonder de aanwezigheid van de begeleider.

Tot slot.
In dit artikel zijn wij ingegaan op problemen die studenten hebben met bepaalde vormen van opleidingsonderwijs en hoe wij daar als lerarenopleiders mee omgaan. Nu kan men zeggen dat omgaan met een specifieke achtergrond van studenten iets anders is dan de problemen die docenten binnen het voortgezet onderwijs ervaren. Dit kunnen en willen wij niet ontkennen. Wij vragen ons echter af of problemen die leraren hebben met veranderingen binnen de wiskunde en het wiskundeonderwijs ten dele ook niet voortkomen uit een 'anders gewend zijn'. In een volgende artikel willen wij daar verder op in gaan. Wij zullen dan ook aandacht besteden aan een mogelijk andere manier van omgaan met de wiskunde en het wiskundeonderwijs.

Literatuur

Broekman, H. G. B., *Wat bepaalt ons handelen?* In: Euclides 59 (1984) nr. 9.
Broekman, H. G. B., *De klok, de tijd en de wiskunde.* In: Wiskunde en Onderwijs (1985), nr. 43.
Broekman, H. G. B. en J. M. J. Weterings, *Zulke goede resultaten? Was die toets wel goed?* In: Euclides 61 (1985), nr. 2.
Lagerwerf, B., *Schoolwiskunde.* In: Euclides 61 (1986), nr. 9.
Lasley, T. L., *Preservice teacher beliefs about teaching.* In: Journal of Teacher Education 31 (1980), nr. 4, blz. 38-42.
Parreren, C. F. van, *Het handelingsmodel in de leerpsychologie.* Rede ter opening van de lessen in het kader van de buitenlandse Francquileerstoel aan de Vrije Universiteit Brussel, 10 januari 1979.
Peters, J. J., *Leren onderwijzen en subjectieve theorieën van aanstaande leraren.* In: Ten Brinke, J. S. e.a. (red.), Nieuwe trends in opleiding, onderwijs en beleid. Verslag van het VULON-congres 1985. Den Haag, SVO 1986.
Vedder, J., *Oriëntatie op het beroep van leraar.* Praktische vorming en reflekteren aan het begin van de lerarenopleiding. Lisse, 1984.
Vedder, J., K. van der Laan en J. M. J. Weterings, *Workshop – reflekteren.* In: Ten Brinke, J. S. e.a. (red.), Nieuwe trends in opleiding, onderwijs en beleid. Verslag van het VULON-congres 1985. Den Haag, 1986.
Verlinden, C. en J. M. J. Weterings, *Systematisch kritisch leren reflekteren in een opleiding voor onderwijsgevenden.* Deel I & II. Utrecht, Vakgroep Onderwijskunde, R.U., 1983.
Weterings, J. M. J. en H. G. B. Broekman, *Proefwerken wiskunde. Een leer en werkboek.* Utrecht, P. D. I. voor de Lerarenopleiding en COCMA, 1985.
Zeichner, K. M. and D. P. Liston, *Theory and practice in the evolution of an inquiry oriented student teaching program.* AERA-paper 1985.
Zeichner, K. M. and B. R. Tabachnick, *Are the effects of university teacher-education 'washed-out' by schoolexperience?* In: Journal of Teacher Education 32 (1981), nr. 3, blz. 7-12.

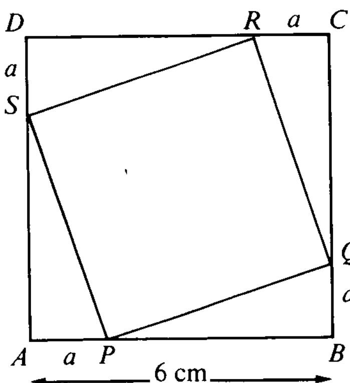
***Over de auteur*:**
Van Harrie Broekman is eerder opgenomen.
Johan Weterings is werkzaam als docent didactiek van de wiskunde aan de COCMA te Utrecht en als docent wiskunde aan het Ghijseninstituut te Utrecht.

Bijlage 1

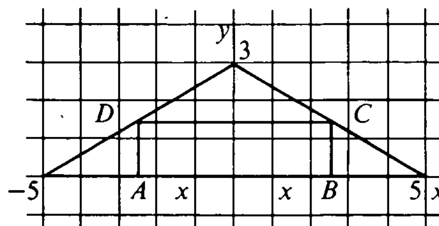
Functies, grafieken of 'gewoon' rekenen resp. doen? (voorschriften, plaatjes, getallen?)

1 *Materiaal Anne van Streun* (R.U. Groningen)
Een service-bedrijf brengt bij reparatie voorrijkosten en uurloon in rekening. Voor een reparatie van 2 uur werd mij 152 gulden in rekening gebracht. Een collega kreeg een rekening van 113 gulden, voor een reparatie van vijf kwartier.
a Welke voorrijkosten (een vast bedrag) en welk uurloon rekent het service-bedrijf?
b Mijn oom kreeg van datzelfde bedrijf na een reparatie van een half uur een rekening van 84 gulden. Hij protesteerde tegen dat bedrag.
Terecht?

2 *Moderne Wiskunde VWO-4* (pag. 19)
$ABCD$ en $PQRS$ zijn vierkanten.
$AP = BQ = CR = DS = a$.
De oppervlakte van vierkant $PQRS$ is een functie van a.
a Geef het functievoorschrift van de functie p: $a \rightarrow$ oppervlakte $PQRS$.
b Teken de grafiek van deze functie.
c Wat is het domein en wat is het bereik van deze functie?
d Hoe kun je de symmetrie van de grafiek verklaren uit de gegeven tekening?
e Hoe groot is de minimale oppervlakte van $PQRS$?
Voor welke waarde van a wordt deze minimale oppervlakte bereikt?
f Voor welke waarden van a is de oppervlakte van $PQRS$ groter dan 30?



3 *Moderne Wiskunde VWO-4* (pag. 20)
Iemand wil op zijn zolderkamer een rechthoekige kast $ABCD$ plaatsen. De oppervlakte van de kast moet zo groot mogelijk zijn.
De hoogte van de kap is 3 m. de diepte van het huis 10 m. Noem de breedte van de kast $2x$ m en de hoogte y m.

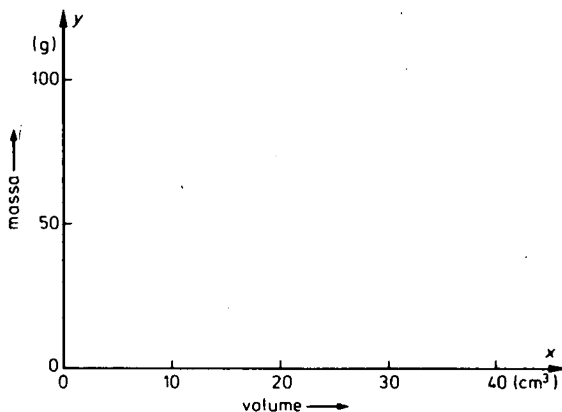


a Druk de oppervlakte van de kast uit in x. Welk domein heeft deze functie?
b Voor welke x is de oppervlakte van de kast maximaal? Hoe hoog en hoe breed is de kast in dat geval?

4 *Gamma (Functies 1)* (pag. 10)
Bij een experiment meet men het volume en de massa van enkele brokken graniet.

Volume in cm³	Massa in gram
22	59,5
43	119,4
18	48,0
34	91,7
27	72,6

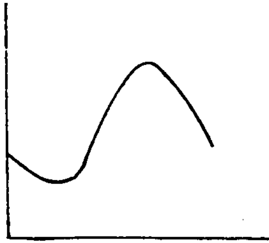
Teken in onderstaand assenstelsel de punten voor de vijf brokken. Trek zo goed mogelijk één rechte lijn door de oorsprong en de vijf punten.



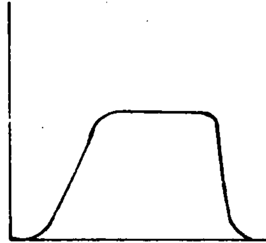
Dat de punten niet precies op één lijn liggen, komt door meetfouten. Elke y-coördinaat kun je vinden door de bijbehorende x-coördinaat met eenzelfde getal (ongeveer 2,8) te vermenigvuldigen. Dat getal heet de evenredigheidsfactor voor y en x. En we zeggen y is *evenredig* met x. De evenredigheidsfactor voor massa en volume heet de *dichtheid* of *soortelijke massa.*

Met behulp van de getrokken lijn kun je de massa aflezen van een stuk graniet, dat een volume heeft van 40 cm³. Doe het. Hoe groot is het volume van een stuk graniet, als de massa 80 gram is?

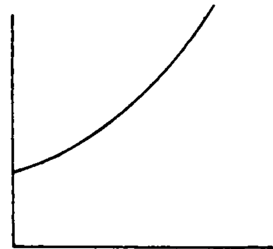
5 *Sigma 4 AB* (pag. 27)
Vraagstukken
Bij de grafieken in de figuren 2 t/m 7 is op de horizontale as steeds de tijd t afgezet. Deze grafieken horen bij de verschijnselen die onder de figuren genoemd worden.
Zoek uit, welke grafiek bij welk verschijnsel hoort.



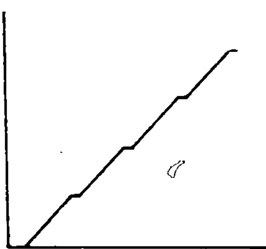
Figuur 2



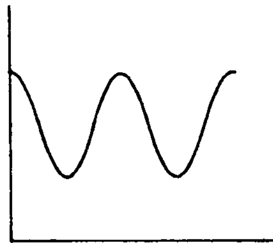
Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5



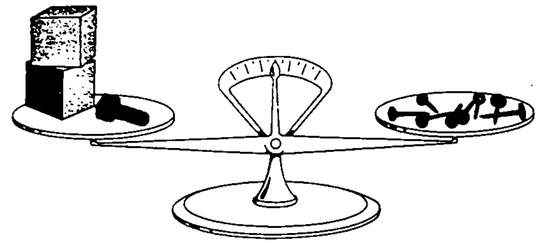
Figuur 6

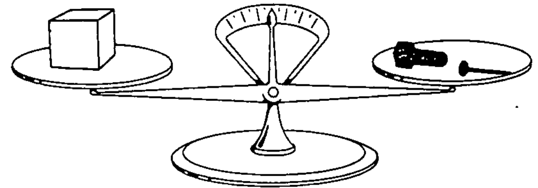


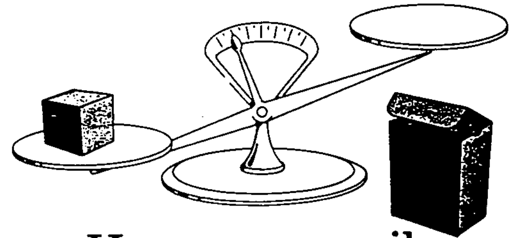
Figuur 7

a De afgelegde afstand tijdens de treinreis Alkmaar-Heiloo-Castricum-Uitgeest.
b Het aantal Nederlanders tussen 1860 en 1960.
c Het temperatuursverloop gedurende één etmaal.
d De waterstand bij Delfzijl gedurende één etmaal.
e Het aantal toeschouwers tijdens een voetbalwedstrijd.
f Het waterverbruik op de avond dat die wedstrijd op de televisie wordt uitgezonden.

Bijlage 2







How many nails will balance the cube?

To Stokvis-Reijers,
te harer nagedachtenis
door Marius en Grietje.

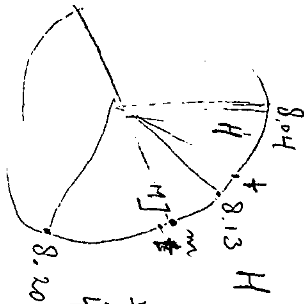
's-Gravenhage, 6 oktober 1986
Den Haag, 6 oktober 1986

$g_n = 1$

$f_i^0(n) = 1$

$f_1(n) = 1$ | $f_2(n) = 1$

$g(n) = 3$



Tabel A-7

JAARKURSUS SCHEIKUNDE (september t/m juni)	*aantal kursisten*	*aantal tentamen-deelnemers*	*aantal geslaagden*
diergeneeskunde	11	7	5
geneeskunde	29	22	17
tandheelkunde	5	3	3
biologie	3	2	1
andere richtingen	4	4	3
TOTAAL	52	38	29 (56%) (76%)

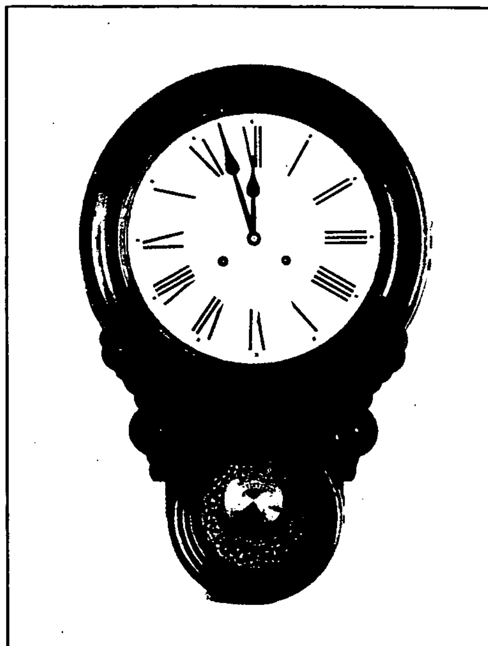
Tabel A-8

JAARKURSUS NATUURKUNDE (september t/m juni)	*aantal*	*aantal tentamen-*	*aantal*

Bijlage 3

Achter-/voorlopende horloges

De familie Bikmans aan het ontbijt



De klok staat stil.
Hoe laat is het?

Harrie: Ik heb het vier over acht, maar mijn horloge loopt wel achter.
Marie José: Hé, dat is aardig. Jouw horloge is dan even ver achter als dat van mij voor.
Al met al weet nu alleen Marie José hoe laat het is.
De kinderen – Marieke en Henrike – kijken daarom ook op hun horloge.
Marieke: Ik heb het tien voor half negen.
Henrike: Ik heb het dertien minuten over acht.
Marie José: Het horloge van Marieke doet het heel behoorlijk. Het verschil met de juiste tijd is een derde van hetgeen mijn horloge voor loopt. Henrieke zit er trouwens ook vlak bij. Het verschil van haar tijd met de juiste tijd is maar een kwart van de afwijking van mijn horloge.
Marieke: Lopen onze horloges voor of achter?
Marie-José: Dat hoef je niet te weten. Je kunt dat zelf wel uitzoeken.
Henrike: Ja, maar jij weet hoeveel jouw horloge voor loopt!
Marie-José: Dat kunnen jullie ook uitzoeken.

HOE LAAT IS HET?

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

548 18 clubs spelen een halve competitie. In 17 speeldagen kan deze afgewikkeld worden. De competitieleider heeft echter een narrige bui en wil het schema zo ontwerpen dat men op een gegeven ogenblik vastloopt. Hij wil zelfs dat dit zo gauw mogelijk gebeurt. Na minimaal hoeveel speeldagen kan men vastlopen?
Zelfde vraag voor 16 clubs.

549 Een aantal personen hebben bezittingen ter waarde $p_1, p_2, \ldots, p_n$. De rijkste geeft de helft van zijn bezit aan de armste. Degene die dan het rijkst is geeft weer de helft van zijn bezit aan degene die nu het armst is. Enz. Hebben er meer dan één maximaal (minimaal) bezit, dan kiezen we een van hen.

a Analyseer hoe dit proces kan verlopen.
b Pas het resultaat toe op het geval $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, ..., $p_n = n$.

550 n is een decimaal geschreven natuurlijk getal. Het produkt van de cijfers noemen we $f_1(n)$.
Verder is $f_1 f_1(n) = f_2(n)$, $f_1 f_2(n) = f_3(n)$ enz.

a Hoe loopt dit proces af?
Het kan zijn dat vanaf zekere i geldt $f_{i+1}(n) = f_i(n)$. In dat geval is $f_i(n)$ één van de getallen 0, 1, 2, ..., 9. Dit getal noemen we dan $g(n)$.
b Gevraagd de verzameling van de getallen n waarvoor $g(n) = 1$.
c Gevraagd de verzameling van de getallen n waarvoor $g(n) = 3$ en die waarvoor $g(n) = 7$.

Oplossingen

545 Eerst de oplossing van het olympiade-vraagstuk. Welke breuken kunnen we krijgen door in 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 haakjes te plaatsen?
1 komt in de teller, 2 in de noemer; de overige zes getallen kunnen willekeurig over teller en noemer verdeeld worden. Dat kan op $2^6 = 64$ manieren.

Om dit aan te tonen, laat ik zien hoe je $\frac{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ kunt krijgen.

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = (1:2):3$$

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = (1:2):(3:4)$$

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} = (1:2):(3:(4:5))$$

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 5} = (1:2):(3:(4:(5:6)))$$

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = (1:2):((3:(4:((5:6):7))))$$

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5} = (1:2):(3:(4:(((5:6):7):8))) \qquad (1)$$

Men ziet dat er twee procédés zijn. Het ene werkt als het laatste getal en het voorlaatste aan verschillende kant van de breukstreep staan, het andere als ze aan dezelfde kant staan.

a Op hoeveel manieren kunnen we de haakjes plaatsen?
In het voorbeeld hierboven zien we dat er uiteindelijk (zie (1)) een quotiënt komt waarvan de teller is 1 : 2 en de noemer de overige zes getallen bevat. Meer algemeen komt er een quotiënt met in de teller de eerste k getallen en in de noemer de overige.
Noem p_k het aantal manieren waarop we de haakjes kunnen plaatsen in $1 : 2 : \ldots : k$. Stel $p_1 = 1$. Dan is algemeen
$p_{k+1} = p_1 p_k + p_2 p_{k-1} + \ldots + p_k p_1$
We vinden zo achtereenvolgens
$p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 2,\ p_4 = 5,\ p_5 = 14,\ p_6 = 42,\ p_7 = 132,\ p_8 = 429$

b Op welke manieren kunnen we $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 5 \cdot 6}$ met haakjes schrijven?
We schrijven de gegeven breuk in de vorm $A : B$. Hierin bevat A de getallen $1, \ldots, k$ en B de getallen $k+1, \ldots, 8$. Zowel A als B bestaat uit één getal of is een breuk waarvan het kleinste getal van de teller 1 kleiner is dan het kleinste getal van de noemer.
Dit splitsingsprocédé zetten we voort op A en B enz. We krijgen zo:

I
$$1 : \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 6}$$
$$\frac{4}{5} : \frac{6}{7 \cdot 8}$$
$$\frac{6}{7} : 8 \qquad (a)$$

of
$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7} : 8$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6}$$
$$\frac{4}{5} : \frac{6}{7} \qquad (b)$$

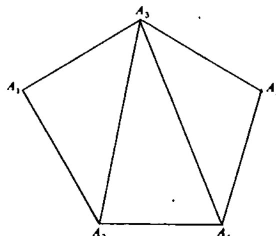
of
$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4} : 7$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5 \cdot 6}$$
$$\frac{4}{5} : 6 \qquad (c)$$

II
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 5} : \frac{6}{7 \cdot 8}$$
$$1 : \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \qquad \frac{6}{7} : 8$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \qquad (d)$$

of
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{2} : 5$$
$$1 : \frac{2}{3 \cdot 4}$$
$$\frac{2}{3} : 4 \qquad (e)$$

Waardoor we de volgende vijf schrijfwijzen met haakjes krijgen:
a 1 : ((2 : 3) : ((4 : 5) : ((6 : 7) : 8)))
b 1 : (((2 : 3) : ((4 : 5) : (6 : 7))) : 8)
c 1 : ((((2 : 3) : ((4 : 5) : 6)) : 7) : 8)
d (1 : ((2 : 3) : (4 : 5))) : ((6 : 7) : 8)
e ((1 : ((2 : 3) : 4)) : 5) : ((6 : 7) : 8)
Welke breuk geeft het grootste aantal schrijfwijzen met haakjes? Hoeveel? Welke breuken geven er maar één?

546 Verbind n punten in het platte vlak door een gesloten gebroken lijn. Elk lijnstuk heeft twee van de punten als uiteinden. Twee niet-opvolgende lijnstukken hebben geen punt gemeen. De n punten liggen niet op één lijn.
Kies drie punten A_1, A_2, A_3 uit de n punten die hoekpunten zijn van een driehoek waarbinnen geen van de overige punten ligt. Dit is steeds mogelijk, omdat er een eindig aantal punten zijn. Kies nu een vierde punt A_4 zo, dat $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ of $A_2A_3A_4$ een driehoek is waarbinnen geen van de overige punten ligt. Ga zo door. We krijgen bijv. de volgende figuur.



Nu is $A_1A_2A_3A_1$ een gesloten gebroken lijn die 3 van de punten verbindt, $A_1A_2A_4A_3A_1$ een gesloten gebroken lijn die 4 van de punten verbindt, $A_1A_2A_4A_5A_3A_1$ verbindt 5 van de punten enz. Het is dus mogelijk.

Wiskunde in de parapsychologie

Mike Staring, Jeroen Staring

Woord vooraf

De term 'parapsychologie' kan bij mensen een veelheid aan beelden oproepen; beelden van bloedserieuze laboratoriumexperimenten, beelden over televisieshows met bestek-vernielende metaalbuigers, flitsen uit bioscoopfilms van Brian de Palma ('*The Fury*' bijvoorbeeld), of zelfs associaties met spoken jagende *Ghost-busters*. Ten dele ten onrechte, natuurlijk: parapsychologie is een wetenschappelijke discipline waarbinnen onderzocht wordt óf, en zo ja: in welke mate, er gesproken kan worden van *para*-normale verschijnselen en – als ze voorkomen – aan welke wetten van deze gehoorzamen, en welke verbanden er met andere zaken bestaan.
In die wetenschap speelt wiskunde een rol. Niet alleen via de achterdeur van statistische evaluatie van experimenten, doch ook via wiskundige modelvorming.[1]
In dit artikel beschrijven wij een wiskundig model over buitenzintuiglijke waarneming. Daaruit leiden we een tweetal hypothesen af en we beschrijven kort hoe met behulp van een huiscomputer de hypothesen getoetst zouden kunnen worden: een (w)aardiger toepassing van micro's, dunkt ons, dan allerlei *war-games*, en wat dies méér zij.
Wellicht is het zo dat ons taalgebruik niet aansluit bij de parapsychologische vaktaal; hiervoor bij voorbaat onze excuses.

Inleiding

Telepathie en helderziendheid in ruimte en tijd worden vaak samengebundeld in de term 'buitenzintuiglijke waarneming' (BZW). In veel speculatieve boeken over paranormale fenomenen wordt uitbundig 'getheoretiseerd' over de wijze waarop BZW zoal tot stand zou kunnen komen: de ongekroonde koning betreffend het fantaseren over dit thema is ongetwijfeld de 'Lama' *Lobsang Rampa*, van wie zelfs enkele jaren geleden een boekje in het Nederlands is vertaald. Het zij zo! Verstandiger lijkt ons te trachten te achterhalen of bepaalde, niet al te gezochte, veronderstellingen over een mogelijke regelmaat in de optredende verschijnselen bij toetsing van experimenteel verkregen resultaten al dan niet gefalcificeerd kunnen worden. Dat dat niet alleen in parapsychologische laboratoria hoeft te gebeuren, maar dat zulks ook bij u in de huiskamer, achter uw PC-tje, kan, hopen wij in het navolgende duidelijk te maken.
Daarnaast lijkt het ons zinnig te pogen paranormale verschijnselen in verband te brengen met andere 'randgebieden der wetenschappen', zodat overeenkomsten en verschillen met andere niet-alledaagse of niet volledig begrepen verschijnselen ontdekt en mogelijk verklaard kunnen worden.
In dit artikel willen wij ons beperken tot de eerstgenoemde variant van onderzoek. Wij beschrijven met behulp van boomdiagrammen telkens een onderzoeks-opzet van de volgende soort: een experimentator deelt aan een proefpersoon mee dat een toevalsmechanisme een selectie zal maken (of al gemaakt heeft) uit een aantal alternatieven U_1, U_2, ..., U_n.
De alternatieven U_1, U_2, ..., U_n worden bekend gemaakt aan de proefpersoon, maar *niet* de kansen waarmee de toevals-generator de selectie zal laten plaatsvinden (dit laatste is *essentieel* voor het te ontwikkelen model!). De proefpersoon moet trachten te 'voorspellen' welk van de alternatieven U_1, U_2, ..., U_n gerealiseerd zal worden. Daarna volgt mogelijk een nieuwe selectie uit de alternatieven T_1, T_2, ..., T_m. Dit soort experimenten wordt voldoende vaak herhaald om statistische evaluatie van het geheel mogelijk te maken.
Wij zullen *drie* veronderstellingen formuleren over de mate waarin de proefpersoon in staat is juiste 'voorspellingen' te doen in een sessie van experimenten. Onuitgesproken is daarbij dat de proefpersoon een zekere 'constantheid' vertoont in zijn/haar paranormale prestaties. Voor de eerlijkheid vermelden wij dit toch maar even.

De drie veronderstellingen, en tevens de wijze waarop daaruit een formule wordt afgeleid, vertonen zeer grote overeenkomst met het buitengewoon elegante bewijs van één in de coderingstheorie bekende stelling van *Shannon.*[2]
Uit de formule die het paranormaal vermogen van de proefpersoon meet – mits de daaraan ten grondslag liggende veronderstellingen juist zijn! – wordt vervolgens een tweetal hypothesen afgeleid. De eerste houdt in dat het verstandig is om met *asymmetrische kansverdelingen* over de alternatieven te werken; dat wil zeggen met experimenten waarbij niet alle alternatieven eenzelfde kans van optreden hebben.

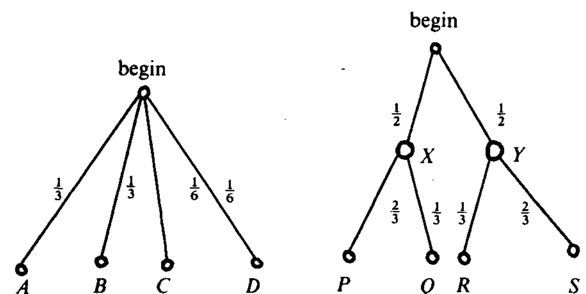
In de tweede hypothese wordt beweerd dat bij een paranormaal begaafd persoon er een *optimaal symmetrisch experiment* (dit is een experiment waarbij alle alternatieven eenzelfde kans op realisering hebben) bestaat: een symmetrisch experiment waarbij de paranormale vermogens duidelijker blijken dan bij elk ander symmetrisch experiment. Wij hebben suggesties toegevoegd over de manieren waarop, in onze ogen bijzonder aardige, experimenten aan het toetsenbord van een huiscomputer informatie kunnen opleveren over het al dan niet juist zijn van de geformuleerde hypothesen.

Drie veronderstellingen

Veronderstel, er wordt een experiment gehouden waarbij de uitkomsten $U_1, U_2, \ldots, U_n$ met kansen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gerealiseerd zullen worden $(\sum_i p_i = 1)$. De alternatieven zelve zijn aan de proefpersoon bekend gemaakt, de kansen $p_1, \ldots, p_n$ echter niet; die zijn slechts bekend aan de experimentator. Gezocht wordt naar een (persoonsafhankelijke) maat die overeen komt met de *a-priori*-kans dat de proefpersoon, voorafgaand aan het experiment (of, althans, aan de bekendmaking van de resultaten van dat experiment aan de proefpersoon) een juiste bewering omtrent de afloop van dat experiment zal doen. We veronderstellen dat die maat P uitsluitend afhankelijk is van de proefpersoon én van $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Daarnaast veronderstellen wij:

1 P is continu afhankelijk van de p_i's. [functienotatie: $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$].
2 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geq P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \geq P(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \geq \ldots\ldots$
3 Als een experiment kan worden opgevat als opeenvolging van twee of meer deelexperimenten, dan is de P-waarde van het totale experiment gelijk aan het gewogen product van de deel-waarden van P.

Met name de derde eis verdient nadere toelichting. De eerste eis stelt slechts dat minimale wijzigingen in de experimentele opzet ook maar kleine veranderingen in de fractie 'hits' teweeg zullen brengen, en de tweede claim stelt dat naarmate het experiment ingewikkelder wordt de fractie successen niet zal toenemen. (Dat de *significantie* van het resultaat wél kan toenemen, tonen wij verderop aan).
De derde voorwaarde behelst bijvoorbeeld het volgende: Veronderstel dat de volgende twee boomdiagrammen elk een kansexperiment voorstellen (figuur 1):



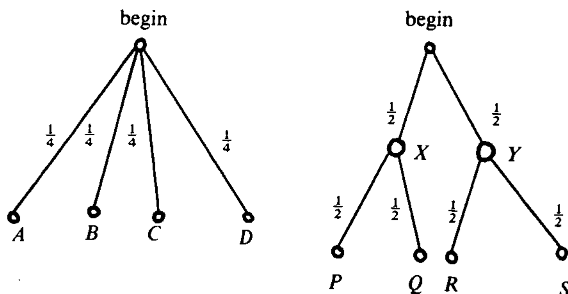
Figuur 1 Boomdiagrammen van kansexperimenten

In het linker boomdiagram bepaalt een toevalsmechanisme het verschijnen van één van de alternatieven A, B, C en D met de aangegeven kansen. Het rechter boomdiagram beschrijft een eerste keuze uit de alternatieven X en Y. Wordt X gekozen, dan treedt een tweede toevalsmechanisme in werking dat de selectie uit de alternatieven P en Q bepaalt. In het andere geval wordt er gekozen uit $\{R, S\}$. Voorwaarde 3 luidt nu, omdat het eerste experiment (de keuze uit A, B, C en D) kan worden opgevat als de opeenvolging in het tweede (de keuze uit P, S, Q en R), dat de kans op een correcte bewering aangaande de uitkomst van het experiment in beide gevallen gelijk is, dus dat:
$P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2} \times P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} \times P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$.
Het rechterdeel van deze identiteit kan als volgt geïnterpreteerd worden: allereerst 'voorspelt' de proefpersoon welk van de alternatieven X en Y

gerealiseerd zal worden. Met kans $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ geschiedt dat correct. Onder de voorwaarde dat de eerste hindernis goed genomen is, zal met kans $\frac{1}{2}$ het experiment vanuit X worden voltooid, met kans $P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ op succes, en met kans $\frac{1}{2}$ vanuit Y, waarbij de kans op succes gelijk is aan $P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Alhoewel de derde eis een zeer sterke voorwaarde is, komt hij op ons als redelijk over.

Gevolgen van de veronderstellingen

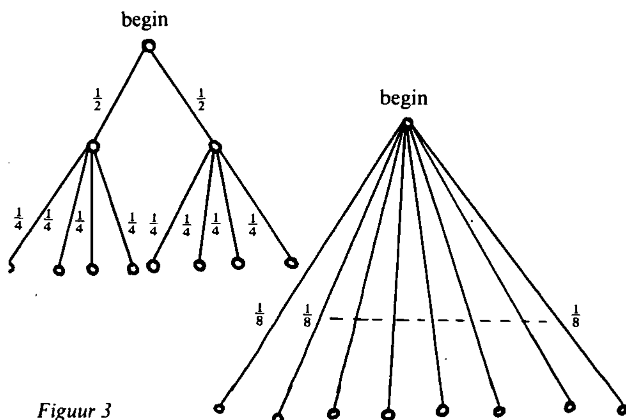
Uit het volgende boomdiagram (figuur 2) volgt:



Figuur 2 Boomdiagram van twee kansexperimenten

$P(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ (voorwaarde 3),
Dus: $P(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \{P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}^2$ (1)
Daaruit, én uit het volgende experiment (figuur 3) valt af te leiden:

$$P(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \ldots, \tfrac{1}{8}) =$$
$$= P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \times \{\tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})\} =$$
$$= \{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^3 \quad (2)$$



Figuur 3

Meer in het algemeen kan men concluderen:

$$\underbrace{P(\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m, \ldots, \tfrac{1}{2}m)}_{2^m \text{ stuks}} = \{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^m \quad (3)$$

Zo bijvoorbeeld ook:

$$\underbrace{P(\tfrac{1}{3}l, \tfrac{1}{3}l, \tfrac{1}{3}l, \ldots, \tfrac{1}{3}l)}_{3^l \text{ stuks}} = \{P(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\}^l \quad (4)$$

Bij elke waarde van $l \in \mathbb{N}'$ is er een waarde van $m \in \mathbb{N}'$ te vinden, zó dat $2^m < 3^l < 2^{m+1}$. Volgens voorwaarde 2 geldt dan:

$$P\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \ldots, \frac{1}{2^m}\right) \geq P\left(\frac{1}{3^l}, \frac{1}{3^l}, \ldots, \frac{1}{3^l}\right) \geq$$
$$\geq P\left(\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}, \ldots, \frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

Substitutie van de resultaten (3) en (4) in deze geschakelde ongelijkheid levert:
$\{P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}^m \geq \{P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}^l \geq \{(P\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}^{m+1}$, en dus:

$$\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{\frac{m}{l}} \geq \{P(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})\} \geq \{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{\frac{m}{l}+\frac{1}{l}} \quad (5)$$

Kiezen wij l steeds groter, en m vervolgens zoals hierboven vermeld, dan zal $\frac{1}{l}$ tot 0 naderen en $\frac{m}{l}$ tot $^2\log 3$, zodat (5) overgaat in:

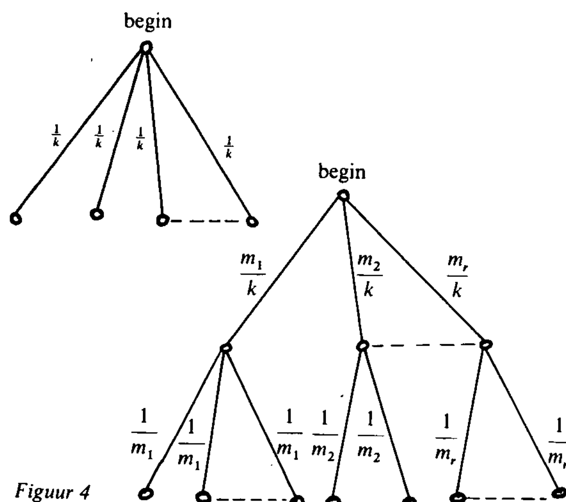
$$P(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log 3} \quad (6)$$

Volstrekt analoog is in te zien:

$$P(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \ldots, \tfrac{1}{k}) = \{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log k} \quad (7)$$

Dit laatste resultaat gebruiken we in een verdere toepassing van voorwaarde 3, als volgt (figuur 4):

$$\left(\sum_{i=1}^{r} m_r = k\right)$$



Figuur 4

$$P(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \ldots, \tfrac{1}{k}) = P\left(\frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{m_r}{k}\right) \times$$
$$\times \left\{\frac{m_1}{k} P\left(\frac{1}{m_1}, \ldots, \frac{1}{m_1}\right) + \frac{m_2}{k} P\left(\frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{m_r}{k} P\left(\frac{1}{m_r}, \ldots, \frac{1}{m_r}\right)\right\}.$$

Met behulp van formule (7) wordt dat:

$$\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log k} = P\left(\frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{m_r}{k}\right) \times$$
$$\times \left\{\frac{m_1}{k}\left\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\right\}^{^2\log m_1} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{m_r}{k}\left\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\right\}^{^2\log m_r}\right\}.$$

Ofwel:

$$P\left(\frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{m_r}{k}\right) =$$
$$= \frac{\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log k}}{\frac{m_1}{k}\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log m_1} + \ldots + \frac{m_r}{k}\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log m_r}} =$$
$$= \frac{1}{\frac{m_1}{k}\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log\left(\frac{m_1}{k}\right)} + \ldots + \frac{m_r}{k}\{P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}^{^2\log\left(\frac{m_r}{k}\right)}}.$$

Hanteren wij dan nog het gegeven dat
$a^{^2\log(b)} = (2^{^2\log a})^{^2\log b} = (2^{^2\log b})^{^2\log a} = b^{^2\log a}$,
dan vinden wij:

$$P\left(\frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{m_r}{k}\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{m_1}{k}\right)^{1 + {}^2\log P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} + \ldots + \left(\frac{m_r}{k}\right)^{1 + {}^2\log P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}.$$

Al met al is uit de voorwaarden (2) en (3) afgeleid:

Stel $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{Q}$, $\forall_i [P_i > 0]$ en $\sum_i p_i = 1$.

Stel verder $a = 1 + {}^2\log P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = {}^2\log(2P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}))$, dan geldt:

$$P(p_1, p_2, \ldots, p_r) = \frac{1}{p_1^{\,a} + p_2^{\,a} + \ldots + p_r^{\,a}} \qquad (8)$$

Uit voorwaarde (1) – de continuïteit van P – volgt tenslotte dat de veronderstelling dat $p_i \in \mathbb{Q}$ mag komen te vervallen.

Interpretatie van de afgeleide formule

Veronderstel eens, dat het met uw paranormale vermogens de laatste tijd niet zo best is gesteld. Met andere woorden: stel $P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$.
In dat geval geldt:
$a = {}^2\log(2 \times P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) = {}^2\log 1 = 0$.
Substitutie van $a = 0$ in formule (8) levert:

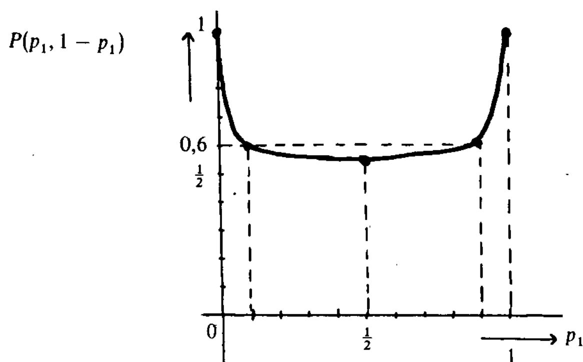
$$P(p_1, p_2, \ldots, p_r) = \frac{1}{p_1^{\,0} + p_2^{\,0} + \ldots + p_r^{\,0}} =$$
$$= \frac{1}{1 + 1 + \ldots + 1} = \frac{1}{r}.$$

Dit lijkt nogal *bizar*: niet alleen zou dan bijvoorbeeld gelden $P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$, maar ook $P(\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}) = \tfrac{1}{2}$.
Op dit punt is het dienstig op te merken dat wij bij de beschrijving van de opzet van het experiment ervan uit zijn gegaan dat de proefpersoon *niet* ingelicht wordt over de *kansen* waarmee de toevalsgenerator werkt, *doch uitsluitend* ingelicht *over de aantallen alternatieven* waaruit in de afzonderlijke fasen van het experiment wordt gekozen. Dit betekent dat een niet-paranormaal-begaafd proefpersoon de situatie $(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ niet kan onderscheiden van de situatie $(\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5})$. Vandaar dat hij/zij voor die verschillende situaties met dezelfde kans scoort. Zou de proefpersoon wél ingelicht zijn/worden over de kansen dan zou in de situatie $(\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5})$ aanmerkelijk beter gescoord kunnen worden, bijvoorbeeld door consequent op het eerste alternatief te gokken. Het schijnbaar bizarre is hiermee verklaard.
Veronderstel nu dat u het Transcendente Meditatie-(*TM*)-program hebt doorlopen, waardoor u niet alleen op de meest ongewenste ogenblikken aan het leviteren slaat, maar waardoor ook uw $P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$-waarde is toegenomen tot 0,58.
Dan geldt: $a = {}^2\log 1{,}16 \approx 0{,}2141248$, waaruit bijvoorbeeld volgt:

$$P(p_1, p_2) = P(p_1, 1 - p_1) =$$
$$= \frac{1}{p_1^{\,0{,}2141248} + (1 - p_1)^{0{,}2141248}}$$

voor elke $p_1 \in \langle 0, 1 \rangle$.
In een grafiekje ziet dat er zó uit (figuur 5):

De grafiek vertoont een vrij sterke buiging voor relatief kleine waarden van p_1 en voor relatief grote

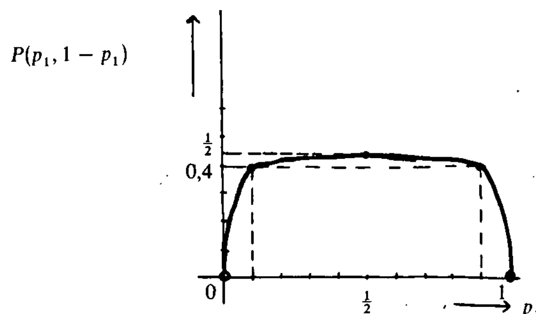


Figuur 5 $P(p_1, 1-p_1)$, in geval $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0{,}58$

waarden van p_1. Ons model voorspelt dus grotere kansen op succes voor *die* waarden van p_1 dan voor waarden van p_1 in de buurt van $\frac{1}{2}$. Extreme waarden van p_1 worden kennelijk goed 'herkend' en 'gebruikt' door paranormaal begaafden. Is dit model wellicht een gedeeltelijke verklaring voor de wel eens gerapporteerde juiste voorspellingen van bijzonder onwaarschijnlijke gebeurtenissen?
Uw huiscomputer kan een handig hulpmiddel zijn om de consequentie van het model te toetsen. Grof geschetst zou dat bijvoorbeeld zó kunnen: de computer bepaalt met behulp van haar toevalsgetallengenerator in het geheim een waarde van p_1.
Vervolgens kiest de computer met kans p_1 de waarde Ø (= nul), en met kans $(1 - p_1)$ de waarde 1 (= één), en legt het resultaat van die keuze vast in $a[i]$, *zonder* dat resultaat op het beeldscherm te vertonen. U zelf weet op dat ogenblik nóch de waarde van p_1 nóch die van $a[i]$, doch moet de waarde van $a[i]$ 'raden' door een Ø of een 1 vast te leggen in $b[i]$. Dit gehele proces moet voldoende vaak herhaald worden om er met behulp van statistische methoden iets zinnigs over te kunnen zeggen. Een pseudo-BASIC-programmaatje voor dit experiment kan er dan als volgt uitzien:

```
RANDOMIZE: FOR I = 1 TO 1ØØØ
LET P=RANDOM (Ø): LET P[I]=P
LET Q=RANDOM (Ø)
IF Q<P THEN LET A[I]=Ø
         ELSE LET A[I]=1
INPUT B[I]
NEXT I
FOR K=1 TO 1ØØØ
IF A[K]=B[K] THEN PRINT (P(K))
NEXT K: END
```

Het model voorspelt dat – als het aantal 'hits' significant hoger is dan 500 – de uitgevoerde waarden P(K) vaker 'relatief klein' of 'relatief groot' zullen zijn dan 'gemiddeld'. Met behulp van een beetje statistiek is dit wat nauwkeuriger te formuleren in een exact toetsbare nulhypothese met bijbehorende alternatieve hypothese.
In de parapsychologische geschriften wordt ook wel eens het verschijnsel 'PSI-missing' beschreven: proefpersonen scoren daarbij dan beduidend 'onder de maat', minder dan op grond van kansberekeningen verwacht zou mogen worden. Stel dat vóór een consequente PSI-misser geldt: $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0{,}45$.
Dan volgt:
$a = {}^2\log(2P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = {}^2\log(0{,}9) \approx -0{,}152$,
dus: $P(p_1, p_2) = P(p_1, 1 - p_1) =$
$$= \frac{1}{p_1^{-0{,}152} + (1 - p_1)^{-0{,}152}}.$$
De grafiek van die functie ziet er als volgt uit (figuur 6):



Figuur 6: $P(p_1, 1-p_1)$, in geval $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0{,}45$

U ziet, dát dán juist het *missen* bij extreme waarden van p_1 optreedt. Scoort u dus bij het computerprogramma beduidend minder vaak dan 500 maal, dan zullen de uitgevoerde P(K) waarden minder vaak 'extreem' zijn dan op grond van het toeval verwacht mag worden.
Al met al kunnen wij stellen dat ons model over BZW (– buitenzintuiglijke waarneming –) bij experimenten waarbij proefpersonen slechts over het aantal alternatieven worden ingelicht, maar *niet* over de kansen waarmee die alternatieven gerealiseerd worden, suggereert dat het best tussen 'PSI-hitters', 'neutralen' en 'PSI-missers' onderscheiden kan worden bij duidelijk *on*-evenwichtige kansver-

delingen van de te realiseren alternatieven. Wij zijn deze hypothese in de door ons bekeken parapsychologische literatuur niet tegengekomen.

Experimenten met even waarschijnlijke alternatieven

In parapsychologisch laboratorium-onderzoek worden veelal experimenten met evenwaarschijnlijke alternatieven ingericht en uitgevoerd. Onverlet hetgeen wij aan het eind van de vorige paragraaf stelden, bevat het model en de daarbinnen afgeleide formule (8) ook over deze situatie nog wel enige informatie.
Substitueren wij in formule (8): $p_i = \frac{1}{r}$, voor elke i, dan volgt:

$$P(\tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{r}, \ldots, \tfrac{1}{r}) =$$

$$= \frac{1}{(\frac{1}{r})^a + (\frac{1}{r})^a + \ldots + (\frac{1}{r})^a} =$$

$$= \frac{1}{r \cdot (\frac{1}{r})^a} = \frac{1}{(\frac{1}{r})^{a-1}} = r^{a-1} \ldots \qquad (9)$$

Gaan wij nu uit van een kaart-raad-experiment dat N maal mét teruglegging wordt uitgevoerd en waarbij telkens r even waarschijnlijke alternatieven voorhanden zijn, dan zou (volgens de wetten van het toeval) het totaal aantal goed geraden kaarten x een binomiaal verdeelde grootheid zijn met verwachtingswaarde $u = N \cdot \frac{l}{r}$ en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{N \cdot \frac{1}{r} \cdot (1 - \frac{1}{r})}$, die bij benadering normaal verdeeld is. Dit alles mits de proefpersoon *niet* paranormaal begaafd is!
Bij de statistische evaluatie van het experiment fungeert dan $z = \frac{x - u}{\sigma}$ (eventueel voorzien van een discontinuïteitscorrectie) als toetsingsgrootheid.
Voor een niet paranormaal begaafd proefpersoon is de verwachtingswaarde van de toetsingsgrootheid z gelijk aan nul. Echter, voor een 'helderziende' zou formule (9) voorspellen:

$$E_z = \frac{E_x - u}{\sigma} = \frac{N \times r^{a-l} - N \times \frac{1}{r}}{\sqrt{N \times \frac{1}{r} \times (1 - \frac{1}{r})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{N} \times (r^{a-1} - r^{-1})}{\sqrt{\frac{1}{r}(1 - \frac{1}{r})}} \qquad (10)$$

Aan formule (10) is te zien dat paranormaal begaafden beter kunnen worden onderscheiden van hen die dat niet zijn, door:
A: de waarde van N te laten toenemen;
B: de waarde van $f_a(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^{a-1} - r^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{r}(1 - \frac{1}{r})}}$

ad A: De waarde van N laten toenemen betekent niets anders dan het experiment vaker te herhalen. Dit kan, en gebeurt uiteraard, zolang daardoor geen storende invloeden als bijvoorbeeld vermoeidheid geïntroduceerd worden.

ad B: Het hier ontwikkelde model suggereert dat experimenten geoptimaliseerd kunnen worden door bij een bepaalde proefpersoon (= een bepaalde waarde van a) het aantal alternatieven bij elke proefneming (= de waarde van r) zó te kiezen dat $f_a(r)$ maximaal is.

Stel dat u bij uw computerexperiment van de vorige paragraaf vond: $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0{,}55$. Dat is niet niks, overigens!
Dan geldt voor u:
$a = {}^2\log(2P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = {}^2\log(1{,}1) \approx 0{,}1375$.
Enig rekenwerk levert in dit geval de volgende tabel:

r	$f_a(r)$ bij $a = 0{,}1375$
2	0,099997
3	0,1153
4	0,12124
5	0,1238
6	0,1249
7	0,1252 : maximaal
8	0,1251
9	0,1247
10	0,1242
∞	0

Dit betekent dat uw resultaten, statistisch gezien, nog *veel significanter* zouden worden als u gaat

experimenteren met telkens *zeven* alternatieven in plaats van *twee*.
Vatten wij deze paragraaf samen, dan komen wij tot de tweede hypothese die uit het model kan worden afgeleid, namelijk: bij een serie experimenten met telkens even waarschijnlijke alternatieven valt te becijferen bij welk aantal alternatieven de resultaten het meest significant zullen zijn.

Tot slot

In het in navolgende literatuurlijst onder (2) vermelde boek beschrijft *John Palmer* op pagina's 87 en 88 een aantal resultaten van experimenten die verband schijnen te houden met de laatstgeformuleerde hypothese. De originele artikelen waarin die experimenten beschreven staan, hebben wij nog niet kunnen inzien. Het is (dus) echter mogelijk dat er op dit moment gepubliceerde resultaten bestaan die op gespannen voet staan met het hier ontwikkelde model, óf er juist in zekere mate mee overeenstemmen. Hoe het ook zij, wij hopen dat dit artikel en de door ons gesuggereerde computerexperimenten u enkele verstrooiende uurtjes hebben bezorgd. Naar resultaten van experimenten die wellicht naar aanleiding van dit artikel worden uitgevoerd, zijn wij in hoge mate benieuwd. Schroomt u niet ze aan ons kenbaar te maken.

Noten

1 Zie bijvoorbeeld: Helmut Schmidt: *A Logically Consistent Model of a World with PSI Interaction*, in het in de literatuurlijst genoemde *Quantum Physics and Parapsychology*.
2 Wij hebben dan ook zwaar geleund op '*The Mathematical Theory of Communication*', pagina's 48-50 en 116-118, door *Shannon* en *Weaver* (zie de bijgevoegde literatuurlijst).

Literatuur

1 De in de tekst genoemde stelling van Shannon, en het bewijs daarvan, vindt u in: Claude E. Shannon & Warren Weaver: *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Illinois, 1972.
2 Op resultaten van laboratorium-onderzoek wordt uitgebreid ingegaan in: Stanley Krippner (ed.): *Advances in Parapsychological Research 2: Extrasensory Perception*. Plenum Press, New York, 1978.
3 Een Nederlandse vertaling met gegevens over parapsychologisch onderzoek biedt: John Beloff (red.): *Parapsychologie Vandaag: Nieuwe vormen van onderzoek*. Lemniscaat, Rotterdam, 1975.
4 Over parapsychologie als wetenschappelijke discipline gaat: Martin Johnson: *Parapsychologie: onderzoek in de grensgebieden van ervaring en wetenschap*. De Kern, Baarn, zonder jaartal.
5 Een ander wiskundig model inzake BZW vindt men in de bijdrage van Helmut Schmidt (pagina's 205-228) van de bundel: Laura Oteri (red.): *Quantum Physics and Parapsychology*. Parapsychology Foundation Inc., New York, 1975. Schmidt betrekt ook telekinese in zijn model. Ons model leent zich daar eveneens toe, via een paar eenvoudige 'vertalingen'. De hier genoemde bundel bevat verder bijdragen over quantummechanische modellen op PSI-gebied: geen treinlectuur.
6 Een breder terrein wordt bestreken in: John White & Stanley Krippner (eds.): *Future Science: Life Energies and the Physics of Paranormal Phenomena*. Anchor Books, New York, 1977.
7 *Last, but not least:* brede samenhangen en perspectieven worden geëxploreerd in het uitgebreide *oeuvre* van Henri van Praag. Men leze zijn tiendelige *Parapsychologische Bibliotheek* (Meulenhoff, Baarn), zijn vierdelige serie *Alles Wordt Anders: Perspectieven en Toepassingen van de Parapsychologie* (Meulenhoff, Baarn). Beide series zijn in de zeventiger jaren verschenen.

Over de auteurs:

Mike Staring is werkzaam aan de vakgroep wiskunde en aktief in de werkgroep vredesonderwijs van de KLS, lerarenopleiding te Sittard.
Jeroen Staring is politiek antropoloog en free-lance publicist.

Mededelingen

Nederlandse vereniging van vrouwen met academische opleiding

Wie A zegt kan ook B zeggen
Op *zaterdag 15 november 1986* organiseert de Vereniging van Vrouwen met Academische Opleiding, VVAO, te Rotterdam ter gelegenheid van haar 50-jarig bestaan een studiemiddag onder het motto *Wie A zegt kan ook B zeggen.* Deze is gewijd aan de pakketkeus van meisjes op het Gymnasium en in het vwo/havo. Ze vindt plaats in het Congrescentrum van de Haven- en Vervoerschool Jan Backx, Japarastraat 4, te Rotterdam-Delfshaven. Aanvang 13.00 uur en einde 17.00 uur. Waarna nog een gezellig samenzijn met de deelnemers volgt tot 18.00 uur. Deelname is gratis.
Het Congrescentrum is uitstekend bereikbaar met het openbaar vervoer: tram 6 en 9, bus 59 en de metro iets verderop. Ook is er voldoende parkeergelegenheid. Opgave – voor 11 november – en informatie bij mevr. mr. R. H. Meeuse-Simon, tel. 010-4 35 91 28.

Waarover gaat het
De sprekers en forumleden zijn deskundigen, die hun sporen verdiend hebben als docent, decaan of onderwijskundige, als ouder, of in het bedrijfsleven, het wetenschappelijk onderzoek en de politieke advisering.
Zij zullen drie punten aan de orde stellen:

- Waarom is een b-richting gewenst ook voor meisjes?
- Hoe komt het dat meisjes hier zo weinig in lijken te zien?
- Wat kunnen ouders, de school en de politiek eraan doen om een b-pakketkeuze bij meisjes te bevorderen?

Een grappige videofilm en een informatiemarkt zorgen voor afwisseling. Koffie, thee en een gezellige muzikale borrel tot slot helpen ons herinneren dat het om een feestelijke gebeurtenis gaat.
Een volledig programmaboekje is op school en bij de oudercommissie in te zien.

Waarom deze studiebijeenkomst
Verandering van de aard van veel studies en beroepen maakt, dat het niet in het vakkenpakket opnemen van wiskunde, natuurkunde en scheikunde vergaande gevolgen heeft voor de latere studie- en beroepsmogelijkheden van meisjes. Uit onderzoek blijkt dat meisjes nog steeds een lager schoolnivo of een lichter vakkenpakket kiezen dan zij gezien hun schoolprestaties zouden aankunnen. Een meisje met een zes voor wiskunde laat dit vak vaak als te moeilijk schieten, terwijl een jongen met hetzelfde cijfer het toch maar probeert, omdat het zo een belangrijk vak is. Desnoods blijft hij dan maar een jaar zitten.
Terwijl ongeveer een kwart van de meisjes de b-kant op gaat, ligt dat bij de jongens op 60%. Toch is het niet zo, dat meisjes er geen aanleg voor zouden hebben. Dit werd onlangs bevestigd door een Finse, die er haar verbazing over uitsprak, dat wij aan de aanleg voor b-vakken bij meisjes twijfelen. In haar land is de deelname aan deze vakken voor jongens en meisjes gelijk. In Frankrijk volgt 40% van de meisjes de b-vakken. Nederland is binnen de EEG samen met Ierland de hekkensluiter. Dat geeft toch wel te denken. Het is de vraag of ouders, docenten en decanen aan meisjes wel dezelfde eisen stellen als aan jongens.

De techniek heeft vrouwen nodig

De techniek wordt vaak gezien als koud en hard. Niet interessant en nuttig voor meisjes.
Vrouwelijke ingenieurs delen deze mening niet. Zij hebben interessante en leuke banen, werken ook met mensen en kunnen het werk goed aan. Zwaar en vies werk doen ze geen van allen.

Waarom heeft de techniek vrouwen nodig?
Op dit moment is de deelname van vrouwen aan de techniek laag. Dit blijkt ook uit de deelname van meisjes aan het technisch onderwijs. In Nederland is de deelname aan het hoger technisch onderwijs (TH/HTS) 8%. In vergelijking tot de andere EG-landen (30%) is dit erg weinig.
Het bedrijfsleven kampt momenteel al met een tekort aan hoger technisch personeel, terwijl de vraag de komende jaren nog zal toenemen. Meisjes kunnen deze vraag opvullen.

November, voorlichtingsmaand voor meisjes
Omdat techniek even goed een vrouwen- als een mannenaangelegenheid kan zijn en omdat de technische sector interessant werk te bieden heeft, organiseren de HTS-en een speciale voorlichtingsmaand voor meisjes. De VHTO (de stichting Vrouwen en Hoger Technisch Onderwijs) heeft de landelijke coördinatie van deze maand in handen.
De aktie wordt 31 oktober landelijk gestart op de HTS in Hilversum. Deze HTS staat die dag open voor middelbare school meisjes. Zij kunnen daar zelf allerlei aktiviteiten verrichten, praten met HTS-sters uit het hele land en praten met afgestudeerde vrouwelijke ingenieurs over hun werk. De aktie wordt feestelijk geopend met de nodige verrassingen. Ook andere belangstellenden zijn welkom (Kolhornseweg 25, Hilversum).
Als vervolg op deze startdag zullen in alle regio's van het land dergelijke dagen georganiseerd worden. Verder zullen de HTS-en op hun voorlichtingsdagen en open dagen extra aandacht besteden aan de mogelijkheden die een HTO-opleiding te bieden heeft voor meisjes.

Post-academiaal onderwijs

Het secretariaat van de Commissie van Voorbereiding Post-Academiaal Onderwijs Wiskunde is met ingang van het cursusjaar 1986-87 waargenomen door mevrouw N. Mitrović, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam.

Inhoud

An Mogensen-Van Werveke: Ringing the Changes 33

A. W. Boon: ${}^{g}\log a = {}^{p}\log a \cdot {}^{g}\log p$ met het groeimodel 44

H. G. B. Broekman, J. M. J. Weterings, 'Ja maar, ik ben gewend ...' 45

Recreatie 55

Mike Staring, Jeroen Staring: Wiskunde in de parapsychologie 57

Mededelingen 64

Adressen van auteurs

A. W. Boon, Brederode, 29,
2261 HG Leidschendam

H. G. B. Broekman, Frans Halsstraat 27,
3583 BL Utrecht

A. Mogensen-Van Werveke, Kortrijksesteenweg
1136, B 9820 St. Denijs-Westrem (België)

Mike Staring, Molierelaan 166,
5924 AN Venlo-Blerick